

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 12. Juni 2013, vor den Übungen

1. Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige zahlentheoretische Funktion

$$S = \sum_{n=1}^N e(f(n)).$$

- (a) Zeige, dass für $1 \leq n, q \leq N$ und $1 \leq h \leq q$

$$S = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^q e(f(n+h)) + \theta \cdot (q+1)$$

mit $|\theta| \leq 1$ gilt.

Hinweis:

Berechne zuerst die Anzahl der Paare (n, h) mit $m = n + h$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

- (b) Zeige:

$$|S| \leq \frac{N^{1/2}}{q} \left(\sum_{h_1=1}^q \sum_{h_2=1}^q \left| \sum_{n=1}^N e(f(n+h_2) - f(n+h_1)) \right| \right)^{1/2} + \theta \cdot (q+1)$$

mit $|\theta| \leq 1$.

- (c) Es sei $\Delta_h(f)(n) = f(n+h) - f(n)$.

Zeige: Ist $\{\Delta_h(f)(n)\}$ auf $[0, 1)$ für alle $n \neq 0$ gleichverteilt, so ist $\{f(n)\}$ auf $[0, 1)$ gleichverteilt.

- (d) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^k \alpha_j n^j$$

mit einem irrationalen α_k . Zeige, dass $\{f_k(n)\}$ auf $[0, 1)$ gleichverteilt ist.

Hinweis:

Der Beweis kann durch Induktion nach k unter Verwendung von Teilaufgabe c) und Aufgabe 3 von Übungsblatt 5 geführt werden. (18 Punkte)

2. Finde sämtliche Dirichletcharaktere $\chi \bmod 15$. Entscheide in jedem Fall, ob χ primitiv ist und bestimme den Führer von χ . (6 Punkte)