Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 22. Dezember 2014, vor den Übungen

1. (a) Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen linear sind:
   i. $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to \left(3x + 2y, -x - \frac{2}{3}y\right)$
   ii. $f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\vec{x} \to x_1 + \ldots + x_n$
   iii. $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \overline{z}$
   iv. $f_4\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $p \to p(1)$ mit $\mathbb{R}[x]$ als Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten
   v. $f_5\colon \{p = a_0 + \ldots + a_3x^3 \colon a_i \in \mathbb{R}\} \to \{p = a_0 + \ldots + a_5x^5 \colon a_i \in \mathbb{R}\}$, $p(x) \to (x^2 - 3x + 2) \cdot p(x)$
   vi. $f_6\colon \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f'' + f = 0\} \to \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f'' + f = 0\}$, $f \to f'$

   (b) Bestimme im Falle der Linearität Bild, Kern, Rang und Defekt der jeweiligen Abbildung.

   (c) Ein injektiver bzw. surjektiver Homomorphismus wird Mono- bzw. Epimorphismus genannt. Welche Morphismusart (inkl. der Arten aus der Vorlesung) liegt jeweils vor? (10 Punkte)

2. Es sei $(V, \oplus, \odot)$ mit $V = \mathbb{R}^+$ und $x \oplus y := x \cdot y$ bzw $x \odot y := y^x$ der Vektorraum von Übungsblatt 6.

   (a) Zeige, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to V$ mit $f(x) = 2^x$ linear ist.

   (b) Gib die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach V an. (2 Punkte)

3. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, und es sei $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{(2,2)}$ durch
$$\varphi(a) := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
   für $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definiert. Zeige:

   (a) Es gilt $\varphi \in L(\mathbb{C},\ \mathbb{R}^{(2,2)})$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{C}$.

   (b) Es ist $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

   (c) Es gilt $\varphi(\overline{a}) = \varphi(a)^T$ für alle $a \in \mathbb{C}$. (3 Punkte)

4. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$ und $\varphi\colon V \to V$ linear sowie $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Zeige:

   (a) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi^2)$.

   (b) Es gilt genau dann $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$, wenn $\mathrm{rg}(\varphi^2) < \mathrm{rg}(\varphi)$ gilt. (3 Punkte)

5. Ein Graph ist ein Paar $\mathcal{G} = (E, K)$, wobei E eine beliebige Menge von Objekten, die Ecken genannt werden, während K eine Menge von zweielementigen Teilmengen $k = \{e_1, e_2\}$ mit $e_1, e_2 \in E$ ist. Für $k = \{e_1, e_2\}$ schreiben wir $k = \overline{e_1e_2}$ und nennen k die Kante zwischen den Ecken e_1 und e_2. Zwei Ecken e_1 und e_2 heißen verbunden, falls $\overline{e_1e_2} \in K$ ist.
   Es sei nun ein Graph $\mathcal{G} = (E, K)$ mit den Ecken $E = \{e \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}\colon |e| = 2\}$ gegeben.
   Weiter seien zwei solcher Ecken $e_1, e_2 \in E$ genau dann verbunden, wenn $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ ist.
   Zeige, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ zu $(\gamma_5, \circ)$ isomorph ist. (6 Punkte)