Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 26. Januar 2015, vor den Übungen

1. Es seien $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_5$, $\vec{b}_2 = (1,1,0,1,1)^T$, $\vec{b}_3 = (1,2,1,1,0)^T$, $\vec{b}_4 = \vec{e}_4$ und $\vec{b}_5 = \vec{e}_5$ sowie $\varphi \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5)$ mit $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5, x_2 + 2x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, x_2 + x_3 - x_5, x_1 + x_2 + 3x_4)^T$. Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_5\}$. Gib eine Basis $\mathcal{B}'$ an, damit $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{0}, \vec{0})$ gilt. (6 Punkte)

2. Prüfe, ob die LGS $A_i \vec{x}_i = \vec{b}_i$ über K_i für $i = 1,2,3$ lösbar, eindeutig bzw. universell lösbar sind:

   (a) $K_1 = \mathbb{R}$,
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) $K_2 = \mathbb{C}$,
   $$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) $K_3 = \mathbb{F}_4$,
   $$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & t & t+1 & t \\ 0 & t+1 & 1 & t+1 \\ t & t & t+1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

   (4 Punkte)

3. Es sei $V = \mathbb{F}_2^2$. Bestimme sämtliche lineare Mannigfaltigkeiten in V. (3 Punkte)

4. Bestimme die Lösungsgesamtheit des reellen LGS $A\vec{x} = \vec{b}_i$ mit $i = 1,2$ für
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 14 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (4 Punkte)

5. (a) Es seien $A \in K^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in K^m$ gegeben. Zeige, dass das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann lösbar ist, wenn $\operatorname{Kern} A^T \subseteq \operatorname{Kern} \vec{b}^T$ gilt.

   (b) Es sei nun
   $$\operatorname{Kern} A^T = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
   für ein $A \in \mathbb{R}^{(3,4)}$. Bestimme den Rang von A, den Rang von A^T und $\dim \operatorname{Kern} A$.

   (c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
   $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda + 2 \end{pmatrix}$$
   lösbar? (7 Punkte)