Übungen zur
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 8. Mai 2014, vor den Übungen

1. Zwei orthogonale Lateinische Quadrate der Ordnung 7 mögen beide die erste Zeile (7 6 5 4 3 2 1) haben. Ist es möglich, dass in beiden von ihnen in der zweiten Reihe und vierten Spalte dasselbe Element steht? (3 Punkte)

2. Ein Design $D(7,7,3,3,1)$ habe die Objektmenge $D = \{1,2,\ldots,6,7\}$. Vier der sieben Blöcke seien $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{2,4,6\}$, $B_3 = \{3,4,5\}$ sowie $B_4 = \{3,6,7\}$. Finde die restlichen drei Blöcke. (5 Punkte)

3. Es sei $(G,+)$ eine endliche abelsche Gruppe und $D = \{a_1,\ldots,a_k\} \subset G$.
   Dann heißt D eine (G,k,λ)- Differenzenmenge, falls es für alle $d \in G\backslash\{0\}$ genau λ geordnete Paare $(a_i,a_j) \in D^2$ mit $a_i - a_j = d$ gibt.

   (a) Zeige:
   Ist D eine (G,k,λ)- Differenzenmenge, $|G| = v$ und $\mathcal{B}$ die Menge der Blöcke der Gestalt $B_g = \{g + a_1,\ldots,g + a_k\}$ mit $g \in G$, so ist $(D,\mathcal{B})$ ein Design $D(v,v,k,k,\lambda)$.

   (b) Es sei $p \equiv 3 \bmod 4$ eine Primzahl, $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$ die Gruppe der Restklassen modulo p bzgl. der Addition und $Q = \left\{a \bmod p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\colon \left(\frac{a}{p}\right) = 1\right\}$ die Menge der quadratischen Reste modulo p. Zeige, dass Q eine $\left(G, \frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{4}\right)$- Differenzenmenge ist.
   Welche Paramenter besitzt das nach Teilaufgabe a) damit verbundene Design?

   (c) Es seien die folgenden 82 Teilmengen von $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$ gegeben, wobei unter $\overline{c}$ die Restklasse c mod 41 zu verstehen ist:
   $$A_i = \{i, i+\overline{1}, i+\overline{4}, i+\overline{11}, i+\overline{29}\} \quad \text{und} \quad B_i = \{i+\overline{1}, i+\overline{10}, i+\overline{16}, i+\overline{18}, i+\overline{37}\}$$
   mit $i \in \mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$. Zeige:

   i. Jedes $d \in \mathbb{Z}/41\mathbb{Z}\backslash\{\overline{0}\}$ kann auf genau eine Art und Weise als $d = x-y$ geschrieben werden, wobei x und y entweder beide in $A_{\overline{0}}$ oder beide in $B_{\overline{0}}$ sind.

   ii. Es bildet $(\mathbb{Z}/41\mathbb{Z},\mathcal{B})$ mit $\mathcal{B} = \{A_i\colon i \in \mathbb{Z}/41\mathbb{Z}\} \cup \{B_i\colon i \in \mathbb{Z}/41\mathbb{Z}\}$ ein Design $D(41,82,10,5,1)$. (10 Punkte)

   (d) Es sei K mit $|K| \geq 4$ ein Körper und $\mathbb{E} = K^2$ die affine Ebene über K. Zeige:
   Voraussetzung: Es seien g und h zwei verschiedene Geraden von $\mathbb{E}$, P_1, P_2 und P_3 seien Punkte von g, die nicht auf h liegen und Q_1, Q_2 und Q_3 Punkte von h, die nicht auf g liegen. Von den drei Paaren von Geraden $\{\overline{P_iQ_j}, \overline{Q_iP_j}\}$ mit $i,j \in \{1,2,3\}$ und $i \neq j$ mögen zwei aus parallelen Geraden bestehen.
   Behauptung: Auch das dritte Paar besteht aus parallelen Geraden. (6 Punkte)