Übungen zu den Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 5. Juni 2014, vor den Übungen

1. Wir betrachten nochmals die Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$ mit $i, j, k \in \mathbb{H}$ und der in Aufgabe 1 von Übungsblatt 3 definierten Addition und Multiplikation.

   (a) Zeige, dass $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ eine Gruppe der Ordnung 8 bzgl. der Multiplikation bildet.

   (b) Es sei $R = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
   Die Addition $+$ auf R sei komponentenweise definiert: $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ mit $u_i, v_i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, wobei $u_1 + v_1, u_2 + v_2$ Summen in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ sind.
   Wir setzen $i = (0, 1)$, $j = 1 - i$ und $k = 1 + i$ und definieren die Multiplikation auf R wie folgt:

   - Die Multiplikation mit 0 ergibt 0.
   - Die anderen acht Elemente betrachten wir als Elemente der in Teilaufgabe a) eingeführten Gruppe Q und multiplizieren sie nach den Regeln der Multiplikation auf Q.

   Gib eine Beweisskizze des linken Distributivgesetzes $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$ durch Beschreibung einer Liste von höchstens 100 Fällen, die überprüft werden müssen. Diese Überprüfung muss nicht durchgeführt werden.

   (c) Zeige, dass das rechte Distributivgesetz $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ nicht gilt, dass also $(R, +, \cdot)$ keinen Ring bildet.

   (d) Es sei $\mathbb{E} = R^2 = \{(u, v) \colon u, v \in R\}$. Die Addition $+$ auf $\mathbb{E}$ werde komponentenweise definiert: $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ mit $u_i, v_i \in R$.
   Die Skalarmultiplikation werde durch $t \cdot (u, v) = (t \cdot u, t \cdot v)$ mit $t, u, v \in R$ definiert, wobei "$\cdot$" die in Teilaufgabe b) auf R eingeführte Multiplikation bedeute.
   Die Geraden g werden durch $g = \{\vec{u} + t\vec{c} \colon t \in R\}$ mit $u \in \mathbb{E}$ und $\vec{c} \in \mathbb{E} \backslash \{(0, 0)\}$ definiert.
   Es sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Geraden.
   Zeige, dass $(\mathbb{E}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene darstellt.

   (e) Zeige, dass der Satz von Pappos- Pascal in $(\mathbb{E}, \mathcal{G})$ nicht gilt. (12 Punkte)

2. Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung n und $g \in \mathbb{G}$, $\mathbb{E} = \mathbb{P} - g$, $\mathbb{G}' = \mathbb{G} - \{g\}$ bzw. $P \in \mathbb{E}$.

   (a) Zeige, dass $(\mathbb{E}, \mathbb{G}')$ eine affine Ebene ist.

   (b) Das BIB $\mathbb{F}$ habe $\mathbb{E} - \{P\}$ als Objektmenge und die Mengen $h - \{P\}$ mit $h \in \mathbb{G}'$ als Blöcke. Gib die Parameter und das clearset von $\mathbb{F}$ an.

   (c) Es sei $D = \mathbb{G}'$. Für $Q \in \mathbb{E}$ sei $g(Q) = \{h \in \mathbb{G}' \colon Q \in h\}$, und es sei $\mathcal{B} = \{h(Q) \colon Q \in \mathbb{E}\}$.
   Definiere eine Partition $\mathcal{G}$ von D in Teilmengen, so dass $(D, \mathcal{B}, \mathcal{G})$ ein group divisible design ist und gib dessen Parameter an. (6 Punkte)

3. Es sei $(\mathbb{P}_8, \mathbb{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung 8.

   (a) Zeige, dass es sieben Punkte $P_1, \ldots, P_7 \in \mathbb{P}_8$ gibt, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

   (b) Es sei $D = \mathbb{P}_8 - \{P_1, \ldots, P_7\}$ und $\mathbb{G}' = \{g - \{P_1, \ldots, P_7\} \colon g \in \mathbb{G}\}$.
   Zeige, dass $(D, \mathbb{G}')$ ein BIB bildet und bestimme dessen Parameter und clearset.

   (c) Zeige $N(66) \geq 5$. (6 Punkte)