Übungen zu den
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 15. Juli 2014, vor den Übungen

1. Es sei
$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$
   (a) Zeige, dass für $N \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \ldots + (N-1)! \cdot \frac{x}{(\log x)^N} + O_N\left(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\right)$$
   für $x \to \infty$ gilt.

   (b) Eine schärfere Form des Primzahlsatzes besagt:
   Es gibt ein $c_1 > 0$, so dass
$$\psi(x) = x + O\left(x \cdot \exp(-c_1 (\log x)^{1/2})\right)$$
   für $x \to \infty$ gilt. Folgere daraus, dass ein $c_2 > 0$ existiert, so dass
$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \cdot \exp(-c_2 (\log x)^{1/2})\right)$$
   für $x \to \infty$ gilt.

   (c) Gauß bzw. Legendre haben folgende Approximation π_G bzw. π_L für $\pi(x)$ vorgeschlagen:
$$\pi_G = \frac{x}{\log x - 1} \quad \text{bzw.} \quad \pi_L(x) = \frac{x}{\log x - A}$$
   mit $A = 1,083$. Welches ist die bessere Approximation? (12 Punkte)

2. Für $q, l \in \mathbb{N}$ und $(q, l) = 1$ sei
$$\psi(x, q, l) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l \bmod q}} \Lambda(n).$$
   Der Satz von Bombierei besagt:
   Zu jedem $c > 0$ gibt es ein $D > 0$, so dass
$$\sum_{q \le x^{1/2} (\log x)^{-D}} \max_{l:\ (q,l)=1} \max_{y \le x} \left| \psi(y, q, l) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| = O\left(x (\log x)^{-c}\right)$$
   für $x \to \infty$.
   Ein numerisches Ergebnis besagt:
   Für $e^{\lambda} = 1,288$ gilt
$$1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} > 0 \quad \text{und} \quad 2 + \frac{4,02}{e^{2\lambda} - 1} < 9.$$
   Folgere aus dem Satz von Bombierei, dem numerischen Ergebnis und Satz 3.7.1, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $p + 2$ höchstens 8 Primfaktoren besitzt. (12 Punkte)