Übungen zu den
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 22. Juli 2014, vor den Übungen

1. Für $n > 1$ bedeute $p^+(n)$ den größten Primfaktor von n. Es sei $p^+(1) = 0$ gesetzt. Für $x \geq 1$, $y \geq 1$ und $A \geq 1$ sei
$$\sum(x, y; A) := \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} \mu^2(n) A^{\nu(n)}.$$

   (a) Zeige, dass für $\sigma > 0$ die Aussage
$$\sum(x, y; A) \leq \sum_{\substack{n=1 \\ p^+(n) \leq y}}^{\infty} \mu^2(n) A^{\nu(n)} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} = x^{\sigma} \cdot \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{A}{p^{\sigma}}\right)$$
   gilt.

   (b) Zeige, dass eine Konstante $c = c(A)$, die nur von A abhängt, existiert, so dass für $y \geq y_0(A)$ und $x \geq y$
$$\sum(x, y; A) \leq x \cdot \exp\left(-\frac{\log x}{\log y} + c \log\log y\right)$$
   gilt.

   Hinweis:
   Wende Teilaufgabe a) mit $\sigma = 1 - \frac{1}{\log y}$ an, logarithmiere das Produkt
$$\prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{A}{p^{\sigma}}\right)$$
   und verwende die Taylorentwicklung von $f(u) = \log(1 + u)$.

   (c) Die Bezeichnungen seien wie in den Abschnitten 3.2 und 3.3.
   Für feste Konstanten $A \geq 1$ und $B \geq 1$ sei $\omega(p) \leq A$ und
$$|\mathcal{A}_d| \leq \frac{X}{d} \cdot B^{\nu(d)},$$
   falls $p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$, $\mu^2(d) = 1$ gilt. Es sei zudem
$$\sum_{\substack{d \leq X^{1/2} \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu^2(d) |R_d| = O(X^{3/4})$$
   sowie $z = \exp\left(c_0 \frac{\log X}{\log\log X}\right)$.

Es sei $h_1(d) = X^{-1}|\mathcal{A}_d|$, $h_2(d) = X^{-1}|R_d|$ und $h_3(d) = \frac{\omega(d)}{d}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1,2,3\}$ sei

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{0,l}^{(i)} &= \sum_{\substack{X^{1/2}2^l < d \leq X^{1/2}2^{l+1} \\ d|P(z)}} h_i(d) \\
\sum\nolimits_{k,l}^{(i)} &= \sum_{\substack{X^k 2^l < d \leq X^k 2^{l+1} \\ d|P(z)}} h_i(d).
\end{aligned}$$

Zeige unter Benutzung von Teilaufgabe b), dass es positive Konstanten $c_1 = c_1(A,B)$ und $c_2 = c_2(A,B)$ mit

$$\sum\nolimits_{k,l}^{(i)} \leq \exp\left(-c_1(k+1)\cdot\frac{\log X}{\log z} + c_2 \log\log X\right)$$

gibt.

(d) Zeige, dass zu einem $D > 0$ ein $c_0 = c_0(D)$ existiert, so dass

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z)\cdot\left(1 + O_D\left((\log X)^{-D}\right)\right)$$

gilt.

Hinweis:
Beginne mit der Formel des Siebes von Erathosthenes:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

spalte die Summe in

$$\sum\nolimits_I = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq X^{1/2}}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \quad \text{und} \quad \sum\nolimits_{II} = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d > X^{1/2}}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

auf. Verwende die Approximation $|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + R_d$, die Bedingungen aus Teilaufgabe c) sowie die Aufspaltung in Summen der ebenfalls in Teilaufgabe c) betrachteten Art.

(e) Zeige mittels den Ergebnissen von Teilaufgabe c)

$$\pi_2(x) = O\left(x\cdot\frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^2}\right).$$

(24 Punkte)