Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 17. Juli 2014, vor den Übungen

1. Bestimme in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & t & t+1 & 2t & 5 \\ 2 & t^2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4-t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

2. Es sei $A \in K^{(n,n)}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun rekursiv $A^0 = E$ sowie $A^{k+1} = A^k \cdot A$ $(= A \cdot A^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Zeige:
   $$E_n - A^m = (E_n - A) \cdot \sum_{\nu=0}^{m-1} A^\nu = \sum_{\nu=0}^{m-1} A^\nu \cdot (E_n - A)$$

   Eine Matrix $A \in K^{(n,n)}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

   (b) Zeige oder widerlege mittels eines Gegenbeispiels:

      i. Sind $A, B \in K^{(n,n)}$ zwei nilpotente Matrizen, so ist auch deren Summe $A + B$ nilpotent.

      ii. Ist $A \in K^{(n,n)}$ nilpotent, so gibt es $\vec{x} \in K^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$.

   Es sei nun $A \in K^{(n,n)}$ nilpotent.

   (c) Zeige, dass $\operatorname{rg} A < n$ gilt.

   (d) Weiterhin ist
   $$(E_n - A)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{k-1} A^\nu.$$

   (e) Gibt es eine nilpotente Matrix $A \in K^{(n,n)}$ mit $\operatorname{rg} A = n - 1$? (6 Punkte)

3. Es sei $A \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Zeige, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (1) Für alle $\vec{b} \in K^n$ besitzt $A\vec{x} = \vec{b}$ mindestens eine Lösung $\vec{x} \in K^n$.

   (2) Die homogene Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt nur die triviale Lösung.

   (3) Die Matrix A ist regulär. (3 Punkte)

4. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ (n, n) mit $a_{ij} \in K$, die durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad i > j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert sind.
Bestimme für ein beliebiges $\vec{b} \in K^n$ die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ über K. (3 Punkte)

5. Es sei $A \in \mathbb{R}^{(3,4)}$ mit

$$\text{Kern}\, A^T = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Bestimme $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} A^T$ und $\dim \text{Kern}\, A$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

lösbar? (5 Punkte)

6. (a) Berechne im Falle der Existenz die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimme die Lösung von $D\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (11, -11, 22)^T$. (5 Punkte)