ulm university universität ulm

Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte, alles Zusatzpunkte
Abgabe: **Mittwoch, 23. Juli 2014**, vor den Übungen

1. Bestimme für die Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) i. $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$
      ii. die Inversionen von σ und τ
      iii. $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)$ und $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma)$.

   (b) Stelle σ und τ als Produkt von Transpositionen dar. (4 Punkte)

2. Bestimme die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 26 & 1 & 57 \\ 7 & 17 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(6 Punkte)

3. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifiziere mit Hilfe der Leibniz- Formel für $n = 3$ durch Aufschreiben aller $n!$ Summanden, dass $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \vec{a}_3^T \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$ für $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^3$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

   (b) Zeige:
      i. $\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{3} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_\nu) \cdot \vec{e}_\nu$ mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_\nu$.
      ii. $\vec{a}^T \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}^T \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
      iii. Es gilt genau dann $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.
      iv. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
      v. Es gilt $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) \geq 0$ und genau dann $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = 0$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind.

   (c) Bildet $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ einen Ring?

   (d) Existiert ein neutrales Element bzgl. dieser Multiplikation? (10 Punkte)

4. Finde alle Lösungen des LGS $x^3 + y^3 + 7x^2y = 21$ sowie $4x^3 - 2y^3 + 7xy^2 = -48$ unter Zuhilfenahme der Determinante einer 6×6- Matrix. (4 Punkte)

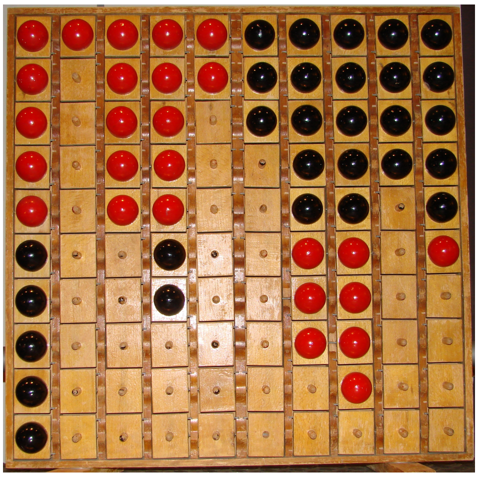
5. (a) Es seien V und W Vektorräume über K sowie U_1 und U_2 Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Weiter seien $\varphi_i \colon U_i \to W$ lineare Abbildungen für $i = 1, 2$.
   Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ mit $\varphi_{|U_i} = \varphi_i$ für $i = 1, 2$ gibt.

   Es sei H ein $(n-1)$- dimensionaler Unterraum des K^n und $\vec{x}^* \in K^n \backslash H$.
   Für einen Endomorphismus $\varphi \colon K^n \to K^n$ gelte $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in H$ und $\varphi(\vec{x}^*) = -\vec{x}^*$.

   (b) Zeige, dass φ durch diese Forderungen eindeutig bestimmt ist.

   (c) Bestimme $\det \varphi$. (5 Punkte)

6. In einem kleinen aber feinen Bürgermuseum außerhalb Ulms entdeckt ein sich von den Strapazen der Linearen Algebra erholender Student einen Abakus, der zu diesem Zeitpunkt folgende Einstellungen aufweist:



   (a) Welche Zahl im Zehnersystem zeigt der Abakus denn an, wenn die rechte Spalte die Einerstelle darstellt und von oben herab gelesen wird?

   (b) Der Student, der zu Schulzeiten nie mit einem Abakus in Berührung kam, sondern alles mit seinem programmierbaren Taschenrechner gelöst hat, erkennt den Abakus nicht als solchen, sondern missinterpretiert ihn als quadratische Matrix A über dem Körper $\mathbb{F}_3$, wobei "keine Kugel" für die Restklasse $\overline{0}$, die schwarzen Kugeln für $\overline{1}$ und die roten für $\overline{2}$ stehen. Dabei ärgert er sich noch, dass die Kugeln des Abakus nicht drei verschiedene Farben haben, weil er dann ja im $\mathbb{F}_4$ rechnen könnte. Entsprechende Verknüpfungstafeln hat er in seinem LA- Skript. Welche Determinante errechnet nun der Student?

   (c) Welche Schlüsse zieht der Student für die Existenz der inversen Matrix (welche der Student aber nicht explizit ausrechnen möchte- aus welchen Gründen auch immer)?

   (d) Was er aber macht, ist das LGS $A\vec{x} = (\overline{1}, \dots \overline{1})^T$ teilweise zu lösen. Wie lauten x_1, x_3 und x_7?

   (e) Mittlerweile ist ein Museumsmitarbeiter erschienen, der ihm die Funktionsweise des Abakus erläutert- auch, dass die Farben der Kugeln keinerlei Bedeutung haben, worauf der Student gedanklich sofort wieder vom $\mathbb{F}_3$ auf den $\mathbb{F}_2$ umschaltet. Er überlegt, ob es möglich ist, von der gewöhnlichen Darstellung einer gegebenen Zahl im Zehnersystem zu erkennen, ob die zugehörige Matrix aus dem $\mathbb{F}_2^{(10,10)}$ invertierbar ist. Unter welchen Bedingungen ist sie es?

   (f) Wie viele solcher Zahlen gibt es denn? An welche Struktur erinnern diese? (7 Punkte)