Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 22. Mai 2014, vor den Übungen

1. In den folgenden Beispielen ist jeweils V ein reeller Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Begründe jeweils, ob U auch ein Untervektorraum von V ist:
   (a) $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $U = \{f \in V\colon f(\alpha) = \beta\}$ für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$.
   (c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4\colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5\}$
   (d) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$ (5 Punkte)

2. Es seien M und N nichtleere Mengen bzw. $\mathrm{Abb}(M, N) := \{f\colon M \to N\}$. Wir betrachten nun die Mengen

$$\begin{aligned}
\ell^1 &:= \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty\right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\
\ell^2 &:= \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\right\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\
\ell &:= \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\
\ell_\infty &:= \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

   Zeige, dass $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell \subset \ell_\infty \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen darstellt. (7 Punkte)

3. Es seien $U_1, \ldots, U_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ Unterräume eines reellen Vektorraumes V.
   Man definiert $U := U_1 + \ldots + U_n := \{u_1 + \ldots + u_n\colon u_k \in U_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ und nennt diese Summe direkt, falls für jedes $u = u_1 + \ldots + u_n \in U$ mit $u_k \in U_k$ für $k = 1, \ldots, n$ diese Darstellung eindeutig ist, und schreibt dafür $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.
   (a) Zeige, dass U ein Unterraum von V ist.
   (b) Zeige, dass die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ genau dann direkt ist, wenn die Schnittbedingung

$$U_k \cap (U_1 + \ldots + U_{k-1} + U_{k+1} + U_n) = \{\vec{0}\}$$

   für $k = 1, \ldots, n$ gilt.
   (c) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und die Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   gegeben. Ist die Summe $U + W$ direkt? (8 Punkte)

4. (a) Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linearkombinationen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

(b) Überprüfe, ob die Polynome $q_1 = 9x^2 + 8x + 7$ und $q_2 = x^2$ in der linearen Hülle der Polynome $p_1 = 3x^2 - x + 1$ und $p_2 = 5x^2 + 2x + 3$ liegen. (4 Punkte)