Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Mittwoch, 28. Mai 2014**, vor den Übungen

1. (a) Wird der $\mathbb{R}^3$ von den Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt?

(b) Sind die Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

lineare unabhängig oder abhängig? (3 Punkte)

2. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}$. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, und wir definieren den Unterraum $U = \{f \in V : f(n+2) = f(n) + f(n+1)\}$ sowie $f_1, f_2 \in V$ mit

$$f_1(n) := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{und} \quad f_2(n) := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(a) Zeige, dass U ein Unterraum von V ist.

(b) Zeige $f_1, f_2 \in U$.

(c) Zeige, dass f_1 und f_2 linear unabhängig sind.

(d) Bestimme $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$.

(e) Zeige: Für $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $f \in U$ mit $f(0) = \alpha_0$ und $f(1) = \alpha_1$, nämlich

$$f = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_1 - \alpha_0 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot f_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_0 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \alpha_1\right) \cdot f_2.$$

(f) Zeige, dass f_1 und f_2 eine Basis von U bilden.

(g) Wir betrachten wieder $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$.
Zeige: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f(m+n+2) = f(n) \cdot f(m) + f(n+1) \cdot f(m+1)$. (10 Punkte)

3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Wir definieren

$$h(V) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n \text{ ist eine Kette von Unterräumen } V_i \subset V \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

Zeige $h(V) = \dim V$. (4 Punkte)

4. Wir betrachten den Vektorraum der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Welche der folgenden Funktionenmengen $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ sind dort linear unabhängig?

   (a) $f_n(x) = x + n$

   (b) $f_n(x) = nx + 1$

   (c) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = n \\ 0, & \text{falls } x \neq n \end{cases}$ (4 Punkte)

5. (a) Zeige $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$

   (b) Gibt es in $\mathbb{Z}$ unverkürzbare Erzeugendensysteme unterschiedlicher Länge? (3 Punkte)