Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Mittwoch, 11. Juni 2014**, vor den Übungen

1. Es sei $\mathbb{F}_4$ der Körper mit vier Elementen, über dem ein Vektorraum V mittels $(V, \mathbb{F}_4, \circ)$ mit $V = \mathbb{F}_4^3$ definiert ist.

   (a) Zeige: Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ linear unabhängig, so gibt es 48 Vektoren $\vec{v}_3 \in V$, so dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

   (b) Zeige: Es gibt vier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in V$, von denen je drei linear unabhängig sind.

   (c) Es sei $\mathcal{A}$ die Matrix vom Typ 3×4, deren Spalten gerade die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in V$ sind und $\mathcal{C}$ die Lösungsmenge des LGS $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}$.
   Zeige: $\mathcal{C}$ ist ein Code mit Alphabet $\mathbb{F}_4$ der Länge 4 und Minimalabstand ≥ 4. (4 Punkte)

2. Es sei U ein Unterraum eines Vektorraumes V, und es gelte $\dim V = n$ sowie $\dim U = k$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Ein Unterraum W von V heißt Vektorraumkomplement zu U in V, wenn $V = U \oplus W$ eine direkte Summe ist, d.h. wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{\vec{0}\}$ gilt.

   (a) Zeige, dass U ein Vektorraumkomplement besitzt.

   (b) Bestimme die Dimension eines solchen Komplementes. (2 Punkte)

3. Erweitere die folgenden Mengen linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis des Vektorraums V über dem Körper K.

   (a) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \right\}$, $K = \mathbb{R}$

   (b) $V = \{p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \colon a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, 3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$, $K = \mathbb{R}$

   (c) $V = \mathbb{F}_4$, $\mathcal{B}_3 = \{t\}$, $K = \mathbb{F}_2$ (6 Punkte)

4. Es seien $V = \mathbb{R}^4$ und die Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   gegeben.

   (a) Bestimme $\dim U_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ sowie $\dim(U_1 \cap U_3)$, $\dim(U_2 \cap U_3)$ und $\dim(U_2 + U_3)$.

   (b) Ist es möglich, aus den Vektoren der Erzeugendensysteme eine Basis von V auszuwählen?
   (4 Punkte)

5. Es seien V ein Vektorraum über K mit $\mathbb{Q} \subset K$ und $T = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V.

   Wir definieren $a_{n+1} := -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$.

   Zeige: Jeder Vektor $a \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu a_\nu$$

   mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K$ und $\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu = 0$. (4 Punkte)

6. Wir betrachten nochmals die auf Übungsblatt 3 bereits diskutierte Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in analoger Weise zur Addition über $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{r \cdot s}$ eine Multiplikation, wobei wir die Restklasse $\overline{0}$ ausnehmen.

   (a) Unter welchen Voraussetzungen liegt dann eine Gruppe vor?

   (b) Ist diese im Falle der Existenz abelsch?

   (c) Ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ auch ein Ring bzw. ein Körper? (4 Punkte)