Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Freitag, 20. Juni 2014, vor den Übungen

1. (a) Es seien V_1 und V_2 Vektorräume über einem Körper K und $P := \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \colon \vec{v}_1 \in V_1,\ \vec{v}_2 \in V_2\}$. Weiter sei über $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2) := (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2)$ für alle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2), (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in P$ eine Addition sowie über $\alpha \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_2) := (\alpha\vec{v}_1, \alpha\vec{v}_2)$ für alle $\alpha \in K$ und alle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in P$ eine skalare Multiplikation definiert. Zeige, dass P ein Vektorraum über K ist.

   (b) Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $\mathbb{F}_4$ derjenige mit vier Elementen.
   Zeige, dass der Unterraum $U = \{(xt, x + ty, (t + 1) \cdot y) \colon x, y \in \mathbb{F}_4\}$ von $\mathbb{F}_4^3$ als ein Vektorraum über $\mathbb{F}_4$ oder über $\mathbb{F}_2$ aufgefasst werden kann.

   (c) Gib jeweils Basen für die beiden Vektorräume in Teilaufgabe b) an.

   (d) Wieviele Basen gibt es für den Vektorraum $(\mathbb{F}_4^3, \mathbb{F}_4, \circ)$ (mit Begründung)? (5 Punkte)

2. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

   (a) $f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f_1(z) = |z|$

   (b) $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = \overline{z}$, wobei $\overline{z}$ die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = x - iy$ darstellt

   (c) $f_3 \colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, $f_3(x) = x^2$

   (d) $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_4(x) = (x + 1, x - 1)$ (4 Punkte)

3. Es sei $P = \mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen.

   (a) Zeige, dass $(P, \oplus, \odot)$ mit der Addition $p_1 \oplus p_2 = p_1 \cdot p_2$ für alle $p_1, p_2 \in P$ und der skalaren Multiplikation $r \odot p = p^r$ für alle $p \in P$ und $r \in \mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum darstellt.

   (b) Zeige, dass die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to P$ mit $f(x) = 2^x$ linear ist.

   (c) Gib die Menge $\mathcal{F}$ aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ in P an.

   (d) Wie sieht die Nullabbildung in $\mathcal{F}$ aus? (5 Punkte)

4. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$ und $\varphi \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige:

   (a) Es gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi^2)$.

   (b) Es gilt genau dann $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$, wenn $\mathrm{rg}(\varphi^2) < \mathrm{rg}(\varphi)$ gilt.

   (c) Aus $\varphi^2 = \varphi$ folgt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

   (d) Es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) - \mathrm{rg}(\varphi^2)$. (6 Punkte)

5. Es seien V, W_1 und W_2 Vektorräume über K und $\varphi_1 \colon V \to W_1$ sowie $\varphi_2 \colon V \to W_2$ linear. Zeige:

   (a) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi \colon W_1 \to W_2$ mit $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$, so gilt $\mathrm{Kern}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi_2)$.

   (b) Gilt $\mathrm{Kern}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi_2)$ und ist φ_1 surjektiv, so gibt es eine lineare Abbildung $\varphi \colon W_1 \to W_2$ mit $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$. (4 Punkte)