Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 26. Juni 2014, vor den Übungen

1. (a) Beweise Satz 3.5.1 aus der Vorlesung:
   Der $K^{(m,n)}$ bildet bzgl. der Matrizenaddition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum über dem Körper K mit Dimension $\dim K^{(m,n)} = m \cdot n$.

   (b) Warum bildet der $K^{(m,n)}$ keinen Ring? (4 Punkte)

2. Finde die Umkehrabbildung

   (a) der Eulerabbildung: $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (\lambda x, \mu y)$,

   (b) der Scherung: $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x + \lambda y, y)$. (4 Punkte)

3. (a) Die Abbildung φ sei durch $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, y, 0)$ gegeben.
   Bestimme $\mathrm{Bild}(\varphi)$, $\mathrm{Kern}(\varphi)$, $\mathrm{rg}(\varphi)$ und $\mathrm{def}(\varphi) =: \dim \mathrm{Kern}(\varphi)$.

   (b) Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Nullpunkt und $V' = \{(x, y, 0)\colon x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Bestimme für $\psi\colon V \to V'$, $(x, y, z) \to (x, y, 0)$ für alle möglichen Fälle $\mathrm{rg}(\psi)$ und $\mathrm{def}(\psi)$.

   (c) Es sei $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, 2x, 3x)$. Bestimme $\mathrm{Bild}(\rho)$, $\mathrm{Kern}(\rho)$, $\mathrm{rg}(\rho)$ und $\mathrm{def}(\rho)$. (7 Punkte)

4. (a) Es seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} e \\ \sqrt{2} \\ \pi \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   über K mit $\mathbb{R} \subset K$ gegeben. Bestimme alle möglichen Produkte zweier Matrizen.

   (b) Es sei $Z \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $n \geq 2$ und

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \lambda_1 & \ddots & {\scriptstyle 0} & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

   wobei die Hauptdiagonalelemente und alle Elemente überhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, in der unteren Nebendiagonalen mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ mit $i = 1, \ldots, n-1$ ist und die übrigen Elemente beliebig sind. Weiter bezeichne $\mathcal{Z}(n)$ die Menge aller Matrizen Z mit obiger Gestalt vom Typ (n, n).
   Bestimme $\min\{k \in \mathbb{N}\colon Z^k = 0 \text{ für alle } Z \in \mathcal{Z}(n)\}$ mit $0 \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. (9 Punkte)