ulm university universität ulm

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Donnerstag, 29. Oktober 2015**, vor den Übungen

1. (a) Es sei
$$T(x) := \sum_{n \le x} \log n$$
wie auf Übungsblatt 1 definiert. Zeige unter Verwendung der Stirlingschen Formel
$$\log(N!) = N \cdot \log N - N + O(\log N)$$
die Aussage
$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x \cdot \log 2 + O(\log x)$$
für $x \to \infty$.

   (b) Zeige unter Verwendung von Teilaufgabe a) und Aufgabe 1 b) von Übungsblatt 1
$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = x \cdot \log 2 + O(\log x)$$
für $x \to \infty$.

   (c) Zeige
$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$
für $x \to \infty$.

   (d) Zeige
$$\log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (1 + o(1)) \le \pi(x) \le 2 \log 2 \cdot \frac{x}{\log x} \cdot (1 + o(1))$$
für $x \to \infty$. (12 Punkte)

2. (a) Zeige die zweite Möbiussche Umkehrformel:
Die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:
   i. $F(x) = \sum_{n \le x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \ge 1$
   ii. $G(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \ge 1$.

   (b) Zeige
$$\sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1)$$
für $x \to \infty$. (7 Punkte)

3. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass eine Konstante $C = C(\alpha) > 0$ existiert, so dass
$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) = C(\alpha) \cdot x \cdot (\log x)^{-\alpha} \cdot (1 + o(1))$$
für $x \to \infty$ gilt. (5 Punkte)