Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 10. November 2015, vor den Übungen

1. Es sei $Q(\mathcal{A})$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen in $\mathcal{A}$, und es bezeichne

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n) \quad \text{sowie} \quad c = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

   (a) Zeige die Siebformel:

$$Q(\mathcal{A}) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) |\mathcal{A}_{d^2}|.$$

   (b) Zeige $Q(x) = c \cdot x + O(x^{1/2})$. (8 Punkte)

2. Die Bezeichnungen seien wie in der Vorlesung gewählt.
   Es sei $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ und $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$.

   (a) Zeige:

$$\pi(x) = S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, x^\eta) + O\left(\frac{x^\eta}{\log x}\right).$$

   (b) Folgere aus dem Primzahlsatz, dass zu jedem $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ mit höchstens einer Ausnahme eine Konstante $c(\eta) > 0$ und $x_0 = x_0(\eta)$ existieren, so dass

$$\sum_{d | P(x^\eta)} |R_d| \geq c(\eta) \cdot \frac{x}{\log x}$$

   für alle $x \geq x_0(\eta)$ gilt. (8 Punkte)

3. Wir wollen nun die Aussage

$$0,92 \cdot \frac{\log x}{x} < \pi(x) \leq 1,08 \cdot \frac{x}{\log x}$$

   für alle $x \geq x_0$ zeigen. Dazu benötigen wir einige Vorarbeiten.
   Es sei dazu $D \in \mathbb{N}$, und eine geeignete Gewichtsfunktion $\rho(d)$ sei für alle $d | D$ definiert.
   Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Es gilt

$$\sum_{d|D} \rho(d) \cdot T\left(\frac{x}{d}\right) = (x \log x - x) \cdot \left(\sum_{d|D} \frac{\rho(d)}{d}\right) - x \left(\sum_{d|D} \frac{\rho(d)}{d} \cdot \log d\right) + O(\log x).$$

   (b) Es gilt

$$\sum_{d|D} \rho(d) \cdot T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{r \leq x} c_r \cdot \psi\left(\frac{x}{r}\right),$$

   wobei der Koeffizient c_r nur von der Restklasse von r mod D abhängt. (8 Punkte)