Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Donnerstag, 19. November 2015**, vor den Übungen

1. Wir setzen die Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 fort, um

$$0,92 \cdot \frac{x}{\log x} < \pi(x) \leq 1,08 \cdot \frac{x}{\log x}$$

für alle $x \geq x_0$ zeigen.

(a) Wie betrachten den Spezialfall $D = 30$,

$$\nu(1) = 1, \quad \nu(2) = \nu(3) = \nu(5) = -1, \quad \nu(30) = 1$$

und $\nu(d) = 0$ für alle anderen $d|30$.
Zeige, dass die Vorzeichen der von null verschiedenen c_r alternieren.

(b) Beweise mit Hilfe von Teilaufgabe a):

i. $\psi(x) \geq ax \cdot (1 + o(1))$

ii. $\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq (a + o(1)) \cdot x - \psi\left(\frac{x}{7}\right) + \psi\left(\frac{x}{10}\right)$

(c) Zeige obenstehende Behauptung. (5 Punkte)

2. Es sei $Q(\mathcal{A})$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen in $\mathcal{A}$, und es bezeichne

$$c = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Es sei $\epsilon > 0$ und $\frac{1}{3} + \epsilon < \theta \leq \frac{2}{5}$ sowie $x \geq 1$. Weiter sei

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, \theta) = \{n \in \mathbb{N} \colon x - x^{\theta} < n \leq x\}$$

und $q(x) = Q(\mathcal{A}(x, \theta))$.
Zeige nun, dass ein $x_0 = x_0(\epsilon)$ existiert, so dass für $x \geq x_0$ die Aussagen a) bis c) gelten:

(a)

$$\sum_{d \leq x^{\theta - \epsilon/2}} \mu(d) |\mathcal{A}_{d^2}| = c \cdot x^{\theta} + O\left(x^{\theta - \epsilon/2}\right).$$

(b) Zu gegebenem $l \leq x^{1/3}$ gibt es höchstens ein d, so dass $d^2 l \in \mathcal{A}$ gilt.

(c)

$$\left| \sum_{d \geq x^{\theta - \epsilon/2}} \mu(d) |\mathcal{A}_{d^2}| \right| \leq x^{1/3}.$$

(d) Zeige nun $q(x) = c \cdot x^{\theta} \cdot (1 + o(1))$. (7 Punkte)

3. Die Definition der Funktionen χ_ν im Reinen Brunschen Sieb benützt Schranken der Form $\nu(d) \leq r$. Diese Aufgabe zeigt nun, was die normale Größe von $\nu(n)$ ist.
Zeige:

(a) Es gilt
$$\sum_{n\leq x} \nu(n) = x \log\log x + O(x).$$

(b) Es gilt
$$\sum_{n\leq x} \nu(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x^{1/4} \\ p_1 \in \mathbb{P}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x^{1/4} \\ p_2 \in \mathbb{P}}} \frac{x}{p_1 p_2} + O(x \log\log x).$$

(c) Es gilt
$$\sum_{n\leq x} (\nu(n) - \log\log x)^2 = O(x \log\log x).$$

(8 Punkte)

4. Für $q, l \in \mathbb{N}$ und $(q, l) = 1$ sei
$$\psi(x, q, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \bmod q}} \Lambda(n).$$

Der Satz von Bombieri besagt:
Zu jedem $c > 0$ gibt es ein $D > 0$, so dass
$$\sum_{q \leq x^{1/2}(\log x)^{-D}} \max_{l:\, (q,l)=1} \max_{y \leq x} \left| \psi(y, q, l) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| = O\left(x (\log x)^{-c}\right)$$
für $x \to \infty$.
Ein numerisches Ergebnis besagt:
Für $e^\lambda = 1,288$ gilt
$$1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} > 0 \quad \text{und} \quad 2 + \frac{4,02}{e^{2\lambda} - 1} < 9.$$
Folgere aus dem Satz von Bombieri, dem numerischen Ergebnis und Satz 1.8.1, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $p + 2$ höchstens 8 Primfaktoren besitzt. (4 Punkte)