Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 24. November 2015, vor den Übungen

1. Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen.
Unter dem direkten Produkt $G \times H$ der beiden Gruppen G und H versteht man $(G \times H, \nabla)$ mit $G \times H = \{(g,h)\colon g \in G, h \in H\}$ und der Verknüpfung $\nabla\colon (g_1,h_1)\nabla(g_2,h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \star h_2)$.
Es seien $(L, \circ)$ und $(M, \star)$ Gruppen. Ein Isomorphismus $\Phi\colon L \to M$ ist ein bijektiver Homomorphismus. Falls Φ existiert, heißen L und M isomorph (Schreibweise: $L \cong M$).

   (a) Es seien $(G, \circ)$ bzw. $(H, \star)$ endliche abelsche Gruppen mit Charaktergruppe $(\widehat{G}, \cdot)$ bzw. $(\widehat{H}, \cdot)$. Zeige, dass für die Charaktergruppe $\widehat{G \times H}$ von $G \times H$ der Zusammenhang $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$ gilt.

   (b) Folgere aus dem Chinesischen Restsatz, dass
$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, \cdot)^* \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot)^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)^*$$
für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m,n) = 1$ gilt.

   (c) Gib eine Wertetafel für die Dirichletcharaktere modulo 20 an. (14 Punkte)

2. Für $n > 1$ bedeute $p^+(n)$ den größten Primfaktor von n. Es sei $p^+(1) = 0$ gesetzt.
Weiter sei für $x \geq 1$, $y \geq 1$ und $A \geq 1$
$$\sum(x, y; A) := \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} \mu^2(n) A^{\nu(n)}.$$

   (a) Zeige, dass für $\sigma > 0$ die Aussage
$$\sum(x, y; A) \leq \sum_{\substack{n=1 \\ p^+(n) \leq y}}^{\infty} \mu^2(n) A^{\nu(n)} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} = x^{\sigma} \cdot \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{A}{p^{\sigma}}\right)$$
gilt.

   (b) Zeige, dass eine Konstante $c = c(A)$, die nur von A abhängt, existiert, so dass für $y \geq y_0(A)$ und $x \geq y$
$$\sum(x, y; A) \leq x \cdot \exp\left(-\frac{\log x}{\log y} + c \log\log y\right)$$
gilt.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Wende Teilaufgabe a) mit $\sigma = 1 - \frac{1}{\log y}$ an, logarithmiere das Produkt
$$\prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{A}{p^{\sigma}}\right)$$
und verwende die Taylorentwicklung von $f(u) = \log(1+u)$. (10 Punkte)