Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 8. Dezember 2015, vor den Übungen

1. Es sei χ_0 der Hauptcharakter modulo 8 und χ_1, χ_2 und χ_3 die übrigen Charaktere modulo 8. Zeige:

   (a) Für $1 \leq i \leq 3$ ist $L(s, \chi_i) > 0$ für $s \in [1, \infty)$.

   (b) Es gibt eine absolute Konstante $C > 0$, so dass für $l \in \{1, 3, 5, 7\}$ und $s \in (1, \infty)$ die Aussage

   $$\left| \sum_{p \equiv l \bmod 8} \frac{\log p}{p^s} - \frac{1}{4(s-1)} \right| \leq C$$

   gilt.

   (c) Jede der vier arithmetischen Progressionen $l \bmod 8$ mit $l \in \{1, 3, 5, 7\}$ enthält unendlich viele Primzahlen.

   (d) Zu jeder der Ziffern 1,3,7 und 9 gibt es unendlich viele Primzahlen, deren Darstellung im Dezimalsystem mit dieser Ziffer endet. (12 Punkte)

2. (a) Es sei p_n die n- te Primzahl.
   Folgere aus dem Primzahlsatz die Aussage $p_n = n \log n \cdot (1 + o(1))$ für $n \to \infty$.

   (b) Es sei $b_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b_n = o(\log n)$ für $n \to \infty$ sowie $a_n = [n \log n + b_n]$.
   Zeige:

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\log n} = 1.$$

   (c) Folgere aus dem Primzahlsatz:

   i. $\lim_{x \to \infty} x^{-1} \cdot \sum_{n \leq x} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} = 1.$

   ii. $\liminf_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} \leq 1.$

   iii. $\limsup_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} \geq 1.$

   (d) Folgere aus den Ergebnissen von Aufgabe 3 von Übungsblatt 7:

   i. $\liminf_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} < 1.$

   ii. Der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n}$ existiert nicht.

   (12 Punkte)