# Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 7. Juli 2015, vor den Übungen

1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
   Bestimme das dritte Taylorpolynom von $f$ um die Entwicklungspunkte $x_0 = 0$ sowie $x_0 = \sqrt{3}$.
   (3 Punkte)

2. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$
   (a) Modifiziere die Formel für die Partialbruchzerlegung, indem auch komplexe Nullstellen im Faktorisierungssatz zugelassen werden, um eine Formel für die $n$- te Ableitung von $f$ zu finden.

   (b) Bestimme eine solche Formel.

   (c) Approximiere $f$ als Polynom zehnten Grades um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit expliziter Angabe des Restgliedes nach Lagrange. (7 Punkte)

3. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = x_0$. Weiter sei $f$ in $x_0$ differenzierbar und $|f'(x_0)| < 1$.
   Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ sei durch $f_0(x) := f(x)$ und $f_{n+1}(x) := f(f_n(x))$ definiert.
   Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0) = 0$. (2 Punkte)

4. Es sei $c \in \mathbb{R}$ sowie $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2+3}{2\sqrt{2}}}{(x-1)^2} & \text{für } x \neq 1 \\ c & \text{für } x = 1. \end{cases}$$
   (a) Bestimme die Grenzwerte $\lim_{x\to 1} F(x)$ und $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

   (b) Existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $F$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?

   (c) Bestimme ein Intervall $(a, b)$ mit $a < 0 < b$, so dass $F$ dort eine Umkehrfunktion $F^{-1}$ besitzt.

   (d) Es sei $x_0 = 0$ und $y_0 = F(x_0)$.
   Zeige, dass $F^{-1}$ an der Stelle $y_0$ differenzierbar ist und bestimme $(F^{-1})'(y_0)$. (6 Punkte)

5. Zeige, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ streng konvex ist und $f''(0) = 0$ erfüllt. (2 Punkte)

6. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

   (a) Finde sämtliche Intervalle, in denen $f$ streng monoton wächst bzw. fällt, sowie streng konvex bzw. streng konkav ist.

   (b) Bestimme sämtliche relativen Extrema von $f$ und entscheide, ob es sich um absolute handelt.

   (c) Bestimme die Wendepunkte von $f$. (4 Punkte)