Übungen zur Analysis I für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 28. April 2015, vor den Übungen

1. Es sei ein angeordneter Körper $(K, <, +, \cdot)$ mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ gegeben.
   (a) Wir definieren auf K nun Abbildungen $\oplus$ und $\odot$ durch
   $$a \oplus b := a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \odot b := a + b + a \cdot b.$$
   Zeige, dass man dadurch einen Körper K^* mit der Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ erhält.
   (b) Kann auf K^* eine Ordnung definiert werden, so dass K^* zu einem angeordneten Körper wird?
   (4 Punkte)

2. Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Kann dieser Körper angeordnet werden? (2 Punkte)

3. (a) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$ genau ein $y \in \mathbb{R}_0^+$ mit $y^2 = x$ existiert.
   (b) Es sei $0 < a < b$. Zeige $0 < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$. (4 Punkte)

4. (a) Es seien zwei beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeige: $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
   (b) Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme mit Beweis im Falle der Existenz Supremum, Maximum, Infimum und Minimum von
   i. $M_1 = \{x \in K \colon -1 < x \leq 0\}$
   ii. $M_2 = \left\{x \in K \colon \frac{|x|}{1+|x|}\right\}$ (5 Punkte)

5. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Intervallschachtelung (I_n) ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \ldots$ kompakter Intervalle mit
   - $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
   - zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Intervall I_n mit einer Intervalllänge $|I_n| < \epsilon$.

   (a) Folgere, dass die Aussage
   "Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl, die all ihren Intervallen angehört."
   zum Vollständigkeitsaxiom äquivalent ist.
   (b) Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ definiert man das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel durch
   $$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab} \quad \text{und} \quad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}.$$
   Zeige $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$ und zeige, dass die Gleichheit nur für $a = b$ eintritt.
   (c) Es sei $0 < a < b$. Wir definieren Intervalle $[a_n, b_n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $[a_1, b_1] := [a, b]$ sowie durch $a_{n+1} := G(a_n, b_n)$ und $b_{n+1} := A(a_n, b_n)$.
   Zeige, dass diese eine Intervallschachtelung bilden und dass $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{8a}$ gilt.
   (d) Es sei f_n bzw. F_n die Fläche des dem Einheitskreis einbeschriebenem bzw. umbeschriebenem regelmäßigem n- Eck. Es gelten weiter die Formeln $f_{2n} = G(f_n, F_n)$ sowie $F_{2n} = H(f_{2n}, F_n)$. Zeige, dass die Intervalle $[a_k, b_k]$ mit $a_k := f_{3 \cdot 2^k}$ und $b_k := F_{3 \cdot 2^k}$ eine Intervallschachtelung bilden.
   (9 Punkte)