Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
17.11.2016
Blatt 06

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 24.11.2016 vor den Übungen)

1. (a) Zeige mit der Definition der Kompaktheit, dass $(0,1] \subset \mathbb{R}$ bezüglich d_1 nicht kompakt ist.

   (b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $(\mathbb{R}^n, d_0)$ mit der diskreten Metrik d_0 von Blatt 4 und $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass aus $|M| < \infty$ folgt, dass M kompakt ist. Zeige oder widerlege die Umkehrung.

(3 + 4 Punkte)

2. Es sei $M := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen auf $[0,1]$. Zeige, dass $A := \overline{U_2(0)}$ bezüglich d_∞ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

(3 Punkte)

3. Untersuche die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

   (a) $f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

(3 + 3 Punkte)

4. (a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $f\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Zeige, dass f dann bezüglich d_∞ gleichmäßig stetig ist.

   (b) Zeige, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := \big(\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y)\big)^\top$ bezüglich d_2 stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. Skizziere außerdem $f(A)$ für $A := (-\pi, \pi]^2$.

   (c) Es sei $\varphi\colon C[0,1] \to C[0,1]$ mit $\varphi(h) := \int_0^{\cdot} h(t)\,\mathrm{d}t$ beziehungsweise $\varphi(h)(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in [0,1]$. Wir betrachten $C[0,1]$ mit der Metrik d_∞. Zeige, dass φ gleichmäßig stetig ist.

(3 + 4 + 3 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444