Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
08.12.2016
Blatt 09

Übungen zu Analysis II

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 15.12.2016 vor den Übungen)

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(r,\varphi) := f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$ für alle $(r,\varphi)^\top \in \mathbb{R}^2$. Außerdem seien $x_0, y_0, r_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 = r_0\cos(\varphi_0)$ und $y_0 = r_0\sin(\varphi_0)$. Zeige, dass g ein lokales Extremum im Punkt $(r_0,\varphi_0)^\top$ besitzt, falls f ein lokales Extremum in $(x_0,y_0)^\top$ besitzt. Zeige außerdem, dass die Umkehrung nicht gilt (zeige also an einem konkreten Gegenbeispiel, dass es möglich ist, dass g einen Extremwert besitzt, ohne dass bei f an der entsprechenden Stelle ein Extremwert vorliegt).

(4 Punkte)

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ für $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)^\top\big\}$ und $f(0,0) := 0$ gegeben.
   (a) Zeige, dass f stetig differenzierbar ist.
   (b) Zeige, dass f im Punkt $(0,0)^\top$ zweimal partiell differenzierbar ist.
   (c) Zeige, dass $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$ gilt.
   (d) Bestimme vier paarweise verschiedene Höhenlinien $x\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ der Fläche
   $$\mathcal{F} := \Big\{(u,v,w)^\top \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; w = f(u,v), u^2+v^2 \leq 1\Big\}$$
   mit $f\big(x(t)\big) = 0$ für alle $t \in [-1,1]$. Zwei Höhenlinien gelten als verschieden, wenn sie maximal einen Schnittpunkt besitzen.
   (e) Bestimme $\nabla f\big(x(t)\big)$ und $x'(t)$ für eine differenzierbare Höhenlinie der vorherigen Teilaufgabe, die durch den Punkt $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)^\top$ verläuft.
   (f) Bestimme die Richtung des stärksten Anstiegs in den Punkten $(1,0)^\top$ und $\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)^\top$ für $\varphi = \frac{\pi}{8}$.
   (g) Zeige, dass $(0,0)^\top$ ein stationärer Punkt von f ist, in dem kein lokales Extremum vorliegt.

(2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 Punkte)

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (y^2-x)(y^2-2x)$. Außerdem sei $(x_0,y_0)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)^\top\big\}$ und es sei $x\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $x(t) := t(x_0,y_0)^\top$ (eine Gerade, die die Punkte $(x_0,y_0)^\top$ und $-(x_0,y_0)^\top$ verbindet).
   (a) Zeige, dass die Abbildung $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) := f\big(x(t)\big)$ für jedes $(x_0,y_0)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)^\top\big\}$ ein lokales Minimum bei $t = 0$ aufweist, dass aber f im Punkt $(0,0)^\top$ kein lokales Minimum besitzt.
   (b) Bestimme die Schnittgerade der beiden Tangentialflächen an den Graph der Funktion in den Punkten $(-1,1)^\top$ und $(-1,-1)^\top$ oder zeige, dass die Flächen parallel sind oder zeige, dass die Flächen übereinstimmen.

(3 + 3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Weiter sei $x_0 \in M$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$. Es existiere ein $\varepsilon > 0$, so dass in $U_\varepsilon(x_0)$ alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung von f existieren und im Punkt x_0 stetig sind. Zeige, dass dann

$$f_{x_1x_2x_3}(x_0) = f_{x_2x_3x_1}(x_0) = f_{x_2x_1x_3}(x_0)$$

gilt.

(3 Punkte)

5. Es sei $f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$ für $x, y \in (0,\infty)$. Bestimme die Taylorentwicklung von f im Punkt $(1,1)^\top$ bis zu den Termen mit Ableitungen zweiter Ordnung (einschließlich).

(2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.