Prof. Dr. U. Stadtmüller
Dr. M. Harder

Winter 2016/2017
22.12.2016
Blatt 11

Übungen zu Analysis II

(36 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Donnerstag, den 12.01.2017 vor den Übungen)

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(r,\varphi) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)^\top$ die Polarkoordinatentransformation. Bestimme alle Punkte, in denen die Funktion lokal umkehrbar ist und gib die Ableitung der Umkehrfunktion an. Gib eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ sowie eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R}\times(-\infty,0) \to \mathbb{R}^2$ an. Existiert eine stetige Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)^\top\big\}$?

(4 Punkte)

2. Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)^\top\big\}$ und $f\colon M \to M$ mit
$$f(x,y) := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)^\top$$
für $(x,y)^\top \in M$. Bestimme alle Punkte, in denen f lokal umkehrbar ist und gib dort die Ableitung der Umkehrfunktion an, sofern sie existiert. Zeige oder widerlege, dass f auch global umkehrbar ist.

(5 Punkte)

3. Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F(x,y_1,y_2) := \begin{pmatrix} x^2+y_1^2-2y_2^2+1 \\ x^2+2y_1^2+y_2^2-3 \end{pmatrix}$$
für $(x,y_1,y_2)^\top \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^2$ existieren, so dass $F\big(x, f(x)\big) = 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(0)$ und $f(0) = (1,1)^\top$ gilt. Zeige oder widerlege, dass f in diesem Fall auch explizit bestimmt werden kann.

(5 Punkte)

4. Zeige, dass die Funktion $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 - x_3^3 \\ x_2^5 - x_4 \end{pmatrix}$$
für $x \in \mathbb{R}^4$, lokal in einer Umgebung des Ursprungs nach $(x_1,x_2)^\top$ auflösbar ist. Zeige also, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, so dass $F\big(x_1,x_2,f(x_1,x_2)\big) = 0$ für alle $(x_1,x_2)^\top \in U_\varepsilon(0,0)$ und für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Außerdem soll $f(0,0) = (0,0)^\top$ gelten.

(5 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es sei $x\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $x(t) := \left(t, \sqrt{1-t^2}, \arccos(t)\right)^\top$. Skizziere x und bestimme die Umparametrisierung von x auf Bogenlänge.

(5 Punkte)

6. Es sei $x\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ ein Weg und $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ eine Umparametrisierung von x mittels der Parametertransformation $\sigma\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$, wobei $\sigma \in C^1\big([a,b]\big)$ und $\sigma'(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$ gelte. Außerdem sei $M \subset \mathbb{R}^m$ und ein Vektorfeld $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeige, dass dann

$$\int_\alpha^\beta f \,\mathrm{d}x(s) = \int_a^b f \,\mathrm{d}y(t)$$

gilt, vorausgesetzt, die Integrale existieren.

(4 Punkte)

7. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Außerdem seien $a, b \in (0,\infty)$ und wir betrachten den Weg $x\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $x(t) := \big(a\cos(t), b\sin(t)\big)^\top$. Bestimme $\int_{-\pi}^{\pi} f \,\mathrm{d}x(t)$.

   (b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Funktion mit $f(x) = \big(x_1 + x_3, -x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 1\big)^\top$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Außerdem ist die Kurve $x\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(t) = \left(t\,\mathrm{e}^{1-t^2}, \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}} + t, \frac{2t}{\sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right) + 1}\right)^\top$$

   gegeben. Bestimme $\int_{-1}^{1} f \,\mathrm{d}x(t)$.

(4 + 4 Punkte)

8. Skizziere die Kurve $x : [0,7] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$x(t) = \begin{cases} \binom{t}{t} & \text{falls } t \in [0,1) \\ \binom{2-t}{1} & \text{falls } t \in [1,2) \\ \binom{t-2}{3-t} & \text{falls } t \in [2,3) \\ \binom{1}{t-3} & \text{falls } t \in [3,4) \\ \binom{5-t}{\frac{1}{2}(3-|9-2t|)} & \text{falls } t \in [4,5) \\ \binom{0}{6-t} & \text{falls } t \in [5,6) \\ \binom{6-t}{0} & \text{falls } t \in [6,7] \end{cases}$$

und lies den unter http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1044 verfügbaren Text.

(1 Punkt)

Wir wünschen allen schöne Feiertage und einen guten Start ins neue Jahr.

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=83444