Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: **Mittwoch, 26. Oktober 2016**, vor den Übungen

1. Es sei
$$R := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \not\equiv 0 \bmod 2 \right\}.$$
   (a) Zeige, dass $(R, +, \cdot)$ einen Integritätsring darstellt.
   (b) Bestimme sämtliche Ideale von R. (4 Punkte)

2. Es sei C der Ring aller stetiger Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und I ein Ideal von C.
Zeige: Gibt es zu jedem $x \in [0,1]$ ein $f \in I$ mit $f(x) \neq 0$, so ist $I = C$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Benutze den Satz von Heine- Borel:
   Jede offene Überdeckung eines kompakten Intervalls besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
(3 Punkte)

3. Wir betrachten die Restklassenringe $R_m := (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mit $m \in \{15, 16, 24\}$.
Überprüfe die Einheitengruppen $(R_m^*, \cdot)$ auf Isomorphie. (5 Punkte)

4. Finde ein Polynom $f(x)$ mit
$$f(x) \equiv \begin{cases} 1 \bmod x \\ (x+1) \bmod (x^2+1) \\ x \bmod (x^2+2). \end{cases}$$
(4 Punkte)

5. Es sei $G = ((\mathbb{Z}/250\mathbb{Z})^*, \cdot)$.
   (a) Bestimme die Anzahl der Elemente von G.
   (b) Bestimme das multiplikative Inverse von 27.
   (c) Berechne $7^{101} \bmod 250$.
   (d) Zeige, dass 3 Primitivwurzel modulo 250 ist.
   (e) Wieviele Primitivwurzeln besitzt G?
   (f) Gib drei weitere Primitivwurzeln von G an.
   (g) Existieren Elemente $g \in G$ mit $\mathrm{ord}_{250}\, g = 50$?
   (h) Wieviele Untergruppen besitzt G?
   (i) Zeige, dass 151 in der Untergruppe U_{10} der Ordnung 10 enthalten ist, diese aber nicht erzeugt.
   (j) Zeige, dass U_{10} neben den trivialen Untergruppen noch zwei nichttriviale besitzt.
(8 Punkte)