ulm university universität uulm

Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 19. Januar 2017, vor den Übungen

1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{3}, i)$.
   Weiter sei der Isomorphismus σ_s von $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ durch $\sigma_s\colon \sqrt[8]{3} \to \sqrt[8]{3}i^k$ für $s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $k \in s$ definiert.

   (a) Bestimme $[L\colon \mathbb{Q}]$.

   (b) Finde die Fortsetzungen von σ_s zu den Automorphismen von L.

   (c) Zeige, dass $G(L/\mathbb{Q})$ zur Matrixgruppe
   $$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} : r \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*, s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\}$$
   isomorph ist.

   (d) Zeige, dass M_4 den zyklischen Normalteiler
   $$N_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} & s \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} : s \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \right\}$$
   und die Untergruppe
   $$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -\overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\rangle$$
   besitzt.

   (e) Zeige, dass es genau einen Homomorphismus $\Phi\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ gibt, so dass $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \times_\Phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht abelsch ist.
   Zeige: $G(L/\mathbb{Q}) \cong M_4 \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times_\phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

   (f) Es sei $Q = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$ die Menge der Ecken eines Quadrats im Raum $\mathbb{R}^2$, und D_4 sei die Gruppe aller orthogonalen Abbildungen $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B}(Q) = Q$.
   Weiter sei $\mathcal{W} = \{\sqrt[8]{3}i^k\colon k \in \{0,1,2,3\}\}$. Finde einen Isomorphismus $\psi\colon D_4 \to G(L/\mathbb{Q})$ und eine Bijektion $\rho\colon Q \to \mathcal{W}$, so dass $\psi(\mathcal{B}) \circ \rho = \rho \circ \mathcal{B}$ für alle $\mathcal{B} \in D_4$ gilt.

   (g) Bestimme $d \in \mathbb{Z}$, so dass $L(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. (24 Punkte)