Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 1. Dezember 2016, vor den Übungen

1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$ und $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ sowie L/K die Körpererweiterung von Übungsblatt 5.
   (a) Bestimme sämtliche Untergruppen der Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ sowie die korrespondierenden Zwischenkörper $L/Z/\mathbb{Q}$.
   (b) Welchen Wert nimmt $[L' \colon \mathbb{Q}]$ für $L' = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$ an? (9 Punkte)

2. Die Körper $GF(2) = \{0, 1\}$ und $GF(4) = \{0, 1, t, t+1\}$ seien durch $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t + 1$ bestimmt.
   (a) Bestimme $[GF(4) \colon GF(2)]$.
   (b) Es sei $g \in GF(4)[X]$ durch $g(X) = X^2 + X + t$ gegeben.
   Für u aus einem Erweiterungskörper von $GF(4)$ sei $g(u) = 0$. Weiter sei $GF(16) = GF(4)(u)$.
   Bestimme $G = G(GF(16)/GF(2))$ und zeige, dass G zyklisch ist.
   (c) Finde ein Polynom $h \in GF(16)[X]$, so dass für eine Nullstelle v von h in einem Erweiterungskörper von $GF(16)$ der Körper $L = GF(16)(v)$ genau 256 Elemente besitzt.
   (d) Zeige, dass $G(L/K)$ zyklisch ist. (7 Punkte)

3. Es seien G und H endliche Gruppen und $\mathrm{Aut}(G)$ die Automorphismengruppe von G.
   Weiter sei $\Phi \colon H \to \mathrm{Aut}(G)$ mit $h \to \varphi_h$ ein Homomorphismus.
   Unter dem <u>semidirekten Produkt</u> $G \times_\Phi H$ von G und H versteht man
   $$G \times_\Phi H := \{(g, h) \colon g \in G, h \in H\},$$
   und die Verknüpfung der Elemente von $G \times_\Phi H$ ist durch $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 \varphi_{h_1}(g_2), h_1 h_2)$ definiert.
   (a) Zeige, dass $G \times_\Phi H$ tatsächlich eine Gruppe ist.
   (b) Zeige, dass $G \times_\Phi H$ genau dann ein direktes Produkt ist, wenn $\varphi_h = id_{|G}$ für alle $h \in H$ ist.
   (c) Es sei G eine endliche Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $H \leq G$ eine Untergruppe von G, $G = NH$ und $N \cap H = \{e\}$.
   Weiter sei $\Phi \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \to \varphi_h$ durch $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$ für alle $n \in N$ definiert.
   Zeige: $G \cong N \times_\Phi H$. (8 Punkte)