Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 8. Dezember 2016, vor den Übungen

1. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

und $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ der Vektorraum der Dimension 3 über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Für $l \in \mathbb{N}_0$ sei der Automorphismus τ_l durch

$$\tau_l : G \to G, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to A^l \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi\colon (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +) \to \mathrm{Aut}(G)$, $\overline{r} \to \tau_l$ mit $l \in \overline{r}$ wohldefiniert und ein Homomorphismus ist.

(b) Betrachte das semidirekte Produkt $H := G \times_\Phi \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und berechne

$$\left(\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, 3 \bmod 7 \right) \times_\Phi \left(\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, 2 \bmod 7 \right).$$

(8 Punkte)

2. (a) Bestimme das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Zu welchem der 14 echten Zwischenkörper der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ mit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$ der Übungsblätter 4 und 5 ist der Körper $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$ isomorph? (10 Punkte)

3. Es sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und L ein Zerfällungskörper von f über K.
Zeige $[L : K] | n!$. (6 Punkte)