Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
15.04.2016
Blatt 01

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 22.04.2016 vor den Übungen)

1. Wir betrachten die Mengen $\mathbb{Z}_3 \coloneqq \{0,1,2\}$ und $\mathbb{Z}_4 \coloneqq \{0,1,2,3\}$ zusammen mit den Abbildungen $\oplus_n \colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\odot_n \colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, die durch

$$x \oplus_n y \coloneqq \begin{cases} x+y & \text{falls } x+y<n, \\ x+y-n & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$x \odot_n y \coloneqq \begin{cases} x\cdot y & \text{falls } x\cdot y<n, \\ x\cdot y-n & \text{falls } n \le x\cdot y<2n, \\ x\cdot y-2n & \text{falls } 2n \le x\cdot y<3n, \end{cases}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ sowie $n \in \{3,4\}$ gegeben sind. Die Operationen $+$, $-$ und $\cdot$ bezeichnen dabei die gewöhnliche Addition, Subtraktion und Multiplikation.

(a) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3, \odot_3)$ ein Körper ist (die Axiome K1, K4, K5, K8 und K9 dürfen ohne Beweis vorausgesetzt werden).

(b) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4, \odot_4)$ kein Körper ist.

(4 + 3 Punkte)

2. Es seien $A, B \subset M$ Teilmengen einer Menge M und $f, g : M \to M$ seien Funktionen.

(a) Zeige, dass $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ sowie $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ gilt.

(b) Zeige, dass $f \circ g$ bijektiv ist, falls f und g bijektiv sind. Zeige außerdem, dass dann $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ gilt.

(c) Es seien nun $M = [-1,1]$, $f(x) \coloneqq 2|x| - 1$ und $g(x) \coloneqq \frac{1}{3}(2x-1)$ für $x \in M$. Entscheide jeweils, ob die beiden Funktionen injektiv oder surjektiv sind (oder ob sie beide oder keine der beiden Eigenschaften aufweisen) und begründe Deine Antworten.

(3 + 4 + 4 Punkte)

3. Es sei K ein Körper und es seien $a, b \in K$. Zeige folgende Aussagen von Lemma 1.2:

(a) $(0 < a) \land (a < b) \quad \Longrightarrow \quad (0 < b^{-1}) \land \left(b^{-1} < a^{-1}\right)$.

(b) $(a \le b) \land (b \le c) \quad \Longrightarrow \quad a \le c$.

Gib dabei in jedem Beweisschritt jeweils genau an, welche der Anordnungs- oder Körperaxiome oder welche der in der Vorlesung bereits bewiesenen Aussagen von Lemma 1.2 verwendet werden.

(2 + 2 Punkte)

Eine weitere Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

4. Eine natürliche Zahl $p \neq 1$ wird als *Primzahl* bezeichnet, wenn sie durch keine natürliche Zahl außer sich selbst und 1 ohne Rest teilbar ist. Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 5$ gilt, dass entweder $(p+1)$ oder $(p-1)$ durch 6 teilbar ist. Eine Zahl x wird als *teilbar durch* 6 bezeichnet, falls eine natürliche Zahl n existiert, so dass $x = 6n$ gilt.

(3 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=74932