Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
29.04.2016
Blatt 03

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 06.05.2016 vor den Übungen)

1. (a) Berechne folgende Binomialkoeffizienten, sofern sie definiert sind, oder begründe, weshalb sie nicht definiert sind:

$$\binom{5}{9}, \binom{-9}{5}, \binom{2{,}5}{4}, \binom{4}{2{,}5}, \binom{10^{1010}}{10^{1010}-1}, \binom{49}{6}$$

Gib bei jeder Berechnung mindestens einen Zwischenschritt an.

(b) Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und zusätzlich sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige die Gültigkeit folgender Gleichungen oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

$$\binom{\alpha}{n}\binom{n}{k} = \binom{\alpha}{k}\binom{\alpha-k}{n-k},$$
$$\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \binom{\alpha+n-1}{n},$$
$$2^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right)$$

(3 + 3 Punkte)

2. Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 := -3 + 2i, \quad z_2 := \sqrt{3} + \frac{i}{2}, \quad z_3 := \left(\frac{2}{i\sqrt{3}-1} \right)^3, \quad z_4 := i^{-2015}.$$

(a) Berechne $\overline{z}_i$ und $|z_i|$ für alle $i \in \{1, \ldots, 4\}$.
(b) Bestimme $\mathrm{Re}(z_i^{-1})$ und $\mathrm{Im}(z_i^{-1})$ für alle $i \in \{1, \ldots, 4\}$.
(c) Bestimme $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{z_1}{z_2} = a + ib$ und $z_1 z_2 = c + id$ gilt.

(2 + 2 + 2 Punkte)

3. Es seien $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine komplexe Folge.

(a) Bestimme $\sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k$.
(b) Bestimme $\sum_{k=2}^{n} (a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2})$ für $n \geq 2$.
(c) Bestimme $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j}$.

Schreibe das Ergebnis in geschlossener Form, also ohne Summenzeichen oder Auslassungspunkte und vereinfache so weit wie möglich.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Aus der Vorlesung ist $y = \sqrt{z}$ als eindeutige Lösung von $y^2 = z$ für $z \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ bekannt. Wir erweitern die Abbildung $\sqrt{\cdot}$ nun auf die komplexen Zahlen durch

$$\sqrt{z} := \begin{cases} \sqrt{|z|} \cdot \frac{|z|+z}{||z|+z|} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ i\sqrt{-z} & \text{für } z \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Zeige, dass folgende Aussagen für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $(\sqrt{z})^2 = z$,

(b) $\mathrm{Re}(\sqrt{z}) \geq 0$,

(c) $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$,

(d) $\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\overline{z}}$ falls $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(2 + 2 + 1 + 1 Punkte)

5. Zeige, dass

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt.

(4 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.