Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
03.06.2016
Blatt 07

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 10.06.2016 vor den Übungen)

1. Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeige die Gültigkeit der folgenden Additionstheoreme:

   (a) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$

   (b) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$

   (2 + 2 Punkte)

2. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Berechne folgende Grenzwerte oder zeige, dass sie nicht existieren.

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \frac{1}{x-1}$.

   (b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$.

   (2 + 3 Punkte)

3. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ genau dann existiert, wenn $f(x_0^+)$ und $f(x_0^-)$ existieren und gleich sind.

   (2 Punkte)

4. Es sei $I \subset \mathbb{R}$. Außerdem seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen und es sei $x_0 \in I$, so dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren. Betrachte nun die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) \coloneqq \min\big\{f(x), g(x)\big\}$.

   (a) Zeige, dass $\lim_{x \to x_0} h(x)$ existiert und dass $h(x_0) = \min\big\{f(x_0), g(x_0)\big\}$ gilt.

   (b) Zusätzlich seien f und g auf I monoton wachsend. Zeige, dass dann auch h monoton wachsend ist.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass $h(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) - \big|f(x) - g(x)\big|\Big)$ gilt.

   (2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Die sogenannte Indikatorfunktion einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \{0, 1\}, \qquad \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Existieren die folgenden Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Falls nicht, existieren die Grenzwerte von links und rechts? Begründe Deine Antworten.

(a) $x_0 = 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{falls } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $x_0 = 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{falls } x = 0 \\ |x - 2| & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) $x_0 = 1$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} := [0, 1]$ und $\mathcal{M} := \mathbb{R}$.

(d) $x_0 = 0$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{1}{y} \right\}$ und $\mathcal{M} := \mathbb{R}$.

(2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Die Aufgaben dürfen in Gruppen bearbeitet werden, aber jede Person sollte ihre Lösung selbst und in eigenen Worten aufschreiben. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.