Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2016
01.07.2016
Blatt 11

Übungen zu Analysis I

(24 Punkte entsprechen 100%; Abgabe spätestens am Freitag, den 08.07.2016 vor den Übungen)

1. Begründe für folgende Funktionen, ob sie konvex oder konkav sind. Falls sie keine der beiden Eigenschaften aufweisen, bestimme Teilintervalle des Definitionsbereichs, in denen sie konvex sind.

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan(x^2)$.

   (b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Zeige, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

   Hinweis: Zeige, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ das Maximum von $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(\lambda) \coloneqq f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) - (1-\lambda)f(x) - \lambda f(y)$ nicht positiv sein kann. (3 Punkte)

3. Verwende das Newton-Verfahren, um ein $x \in (0,\infty)$ mit $-x = \log x$ auf drei Nachkommastellen genau zu bestimmen. Beginne mit $x_0 = 1$. Gib alle Zwischenergebnisse an und zeige, dass $|x - x_n| < 10^{-3}$ für das Ergebnis x_n des Newton-Verfahrens gilt. (3 Punkte)

4. Es seien $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0, \ldots, x_n \in I$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Dann wird
$$P_n(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$
das n*-te Lagrange-Polynom* (oder *Interpolationspolynom*) zu f genannt.

   (a) Zeige, dass $P_n(x_j) = f(x_j)$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

   (b) Es sei $x \in (x_0, x_n)\setminus\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ gegeben, definiere dann $F(t) \coloneqq f(t) - P_n(t) - \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}\big(f(x) - P_n(x)\big)$. Zeige, dass $F(x) = 0$ und $F(x_j) = 0$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

   (c) Zeige, dass ein $\xi \in (x_0, x_n)$ existiert, mit $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

   (d) Zeige, dass ein $\xi \in (x_0, x_n)$ existiert, mit $\big|f(x) - P_n(x)\big| \le f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

   (1 + 1 + 4 + 4 Punkte)

5. Zeige mit Riemann-Summen, dass $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ gilt. (2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=74932