Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 21. Juni 2016, vor den Übungen

1. Wir versuchen, die Abschätzung von Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew in Satz 3.3.2 zu verbessern. Wir definieren
$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{und} \quad T(x) := \sum_{n \leq x} \log n.$$
   (a) Zeige:
$$T(x) = \sum_{r \leq x} \psi\left(\frac{x}{r}\right).$$
   Es sei nun $D \in \mathbb{N}$ und $\nu(d)$ eine zahlentheoretische Funktion. Wir betrachten den Ausdruck
$$\sum_{d|D} \nu(d) \cdot T\left(\frac{x}{d}\right). \tag{$\star$}$$
   Diesen Ausdruck wollen wir nun auf zwei Arten auswerten und die Ergebnisse vergleichen.

   (b) Zeige:
$$\sum_{d|D} \nu(d) \cdot T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{m \leq x} c_m \cdot \psi\left(\frac{x}{m}\right)$$
   mit Koeffizienten c_m, die nur von der Restklasse m mod D abhängen.

   Hinweis:
   Werte $(\star)$ mit Teilaufgabe a) aus.

   (c) Zeige:
$$\sum_{d|D} \nu(d) \cdot T\left(\frac{x}{d}\right) = (x \log x - x) \cdot \left(\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d}\right) - x \cdot \left(\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d} \cdot \log d\right) + O(\log x).$$
   Hinweis:
   Werte $(\star)$ mit dem aus der Stirlingschen Formel resultierenden $T(x) = x \log x - x + O(\log x)$ aus.

   Um ein optimales Ergebnis zu erhalten, wählen wir D und $\nu(d)$ so, dass $\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d} = 0$ gilt.

   (d) Zeige
$$\sum_{d|D} \frac{\nu(d)}{d} = 0$$
   für die Wahl $D = 30$ sowie $\nu(1) = \nu(30) = 1$, $\nu(2) = \nu(3) = \nu(5) = -1$ und $\nu(d) = 0$ für alle anderen $d|30$.

   (e) Bestimme nun die Werte c_m.

   (f) Vergleiche nun die beiden Darstellungen von $(\star)$ in den Teilaufgaben b) und c) und bestimme ein bestmöglichstes $a < 1$ mit $\psi(x) \geq ax \cdot (1 + o(1))$. (15 Punkte)

2. *Färbungen eines Halsbandes und kleiner Satz von Fermat:*
   Es seien $a, d \in \mathbb{N}$ und $d \geq 3$. Es werden d Plätze, die mit $0 \bmod d, \ldots, d-1 \bmod d$ bezeichnet werden, in einem Kreis angeordnet.
   Jeder der d Plätze (oder Objekte, die sich auf den Plätzen befinden, wie etwa die Perlen eines Halsbandes) wird mit einer von a Farben gefärbt. Eine Färbung $\mathcal{F}$ kann also als Abbildung

   $$\mathcal{F}\colon \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow \{1, \ldots, a\}, \quad l \bmod d \to \mathcal{F}(l \bmod d)$$

   interpretiert werden.
   Zwei Färbungen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ heißen äquivalent (Schreibweise: $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$), wenn sie durch Rotation der Farben auseinanderhervorgehen, d.h. wenn $\mathcal{F}_2(l \bmod d) = \mathcal{F}_1(l \bmod d + i)$ für ein festes $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ gilt.
   Geht eine Färbung $\mathcal{F}$ durch eine echte, d.h. von der Identität verschiedene, Rotation aus sich selbst hervor, d.h. gilt $\mathcal{F}(l \bmod d) = \mathcal{F}(l \bmod d + i)$ mit $i \not\equiv 0 \bmod d$, so heißt $\mathcal{F}$ selbstäquivalent.
   Das kleinste j mit $1 \leq j \leq d-1$, für das $\mathcal{F}(l \bmod d) = \mathcal{F}(l \bmod d + i)$ mit $i \equiv j \bmod d$ gilt, heißt Periode von $\mathcal{F}$.
   Zeige:

   (a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

   (b) Ist $\mathcal{F}$ selbstäquivalent mit Periode π, so gilt $\pi | d$.

   Von nun an sei $d = p$ eine Primzahl.

   (c) Zeige, dass es $a^p - a$ nichtselbstäquivalente und a selbstäquivalente Färbungen gibt.

   (d) Bestimme die Mächtigkeit der Äquivalenzklassen der Relation $\sim$.

   (e) Folgere den kleinen Satz von Fermat. (9 Punkte)