ulm university universität uulm

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 6 Zusatzpunkte
Abgabe: Dienstag, 26. April 2016, vor den Übungen

1. Zeige: $ggT(m,n) \cdot kgV(m,n) = m \cdot n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. (4 Punkte)

2. Es seien $n_1 = 88326 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 701$, $n_2 = 7960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 199$ und $n_3 = 1280 = 2^8 \cdot 5$ gegeben.
   (a) Bestimme die kanonische Primfaktorzerlegung von $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.
   (b) Bestimme $ggT(n_i, n_j)$ und $kgV(n_i, n_j)$ für $1 \leq i < j \leq 3$ als Primfaktorprodukt. (4 Punkte)

3. (a) Unter der Teilersumme σ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ versteht man die Summe all ihrer positiven Teiler.
      i. Bestimme $\sigma(p)$ für $p \in \mathbb{P}$.
      ii. Zeige: $\sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $\alpha \in \mathbb{N}$.
      iii. Zeige: $\sigma(p^\alpha \cdot q^\beta) = \sigma(p^\alpha) \cdot \sigma(q^\beta)$ mit $p \neq q \in \mathbb{P}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

   (b) Eine Primzahl M_n von der Form $M_n = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ wird Mersenne- Primzahl genannt.
      i. Zeige, dass bereits n eine Primzahl sein muss, wenn M_n eine Primzahl ist.

      <u>*Hinweis:*</u>
      Folgende Identität für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ darf ohne Beweis verwendet werden:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-k-1} \right).$$

      ii. Gib vier Mersenne- Primzahlen an.

   (c) Unter der echten Teilersumme σ^* einer natürlichen Zahl n versteht man die Summe all ihrer echten Teiler, d.h. aller positiver Zahlen $d|n$ mit $d \neq n$.
      Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt vollkommen, wenn $m = \sigma^*(m)$ gilt.
      i. Überprüfe, ob 6 und 12 vollkommen sind.
      ii. Zeige, dass keine Primzahl und keine Primzahlpotenz vollkommen ist.
      iii. Zeige, dass $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ mit verschiedenen Primzahlen p und q mit $p, q > 2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ nicht vollkommen ist.
      iv. Ist die Aussage iii. immer noch richtig, wenn die Bedingung $p, q > 2$ wegelassen wird?
      v. Zeige, dass m vollkommen ist, wenn $m = 2^{p-1} \cdot M_p$ mit einer Mersenne- Primzahl M_p gilt.
      vi. Gib vier vollkommene Zahlen an.

   (d) Eine natürliche Zahl n heißt einsam, wenn

$$\frac{\sigma(n)}{n} \neq \frac{\sigma(m)}{m}$$

      für alle $m \in \mathbb{N} \backslash \{n\}$ gilt.
      i. Zeige, dass alle vollkommenen Zahlen nicht einsam sind.
      ii. Zeige, dass alle Primzahlen einsam sind. (16 Punkte)

4. Ein altes Kinderspiel ist das Spiel "Die böse 7".
Bei diesem werden reihum die natürlichen Zahlen aufgesagt, nur wenn eine Zahl die Ziffer 7 enthält oder durch 7 teilbar ist, muss die betreffende Person "böse" sagen.
Eine Erweiterung davon ist die "böse von- Mangoldt- Funktion".
Die von- Mangoldt- Funktion ist folgendermaßen definiert: $\Lambda(n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ \log p & \text{falls } n = p^k \text{ mit } p \in \mathbb{P} \text{ und } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier werden nun reihum die Funktionswerte $\Lambda(n)$ aufgesagt, es sei denn die Zahl n enthalte die Ziffer 7 oder ist durch 7 teilbar. Dann muss die betreffende Person wieder "böse" sagen.
Notiere die entsprechenden Werte dieses Spiels bis $n = 110$. (6 Zusatzpunkte)