Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 3. Mai 2016, vor den Übungen

1. Zeige, dass es sich bei der Kongruenz modulo m um eine Äquivalenzrelation handelt. (3 Punkte)

2. Die IBAN (International Bank Account Number) ist eine internationale, standardisierte Notation für Bankkontonummern. Sie besteht aus maximal 34 Zeichen und setzt sich aus einem zweistelligen Ländercode, einer zweistelligen Prüfziffer und einer max. 30stelligen Kontoidentifikation zusammen. In Deutschland besteht die IBAN aus 22 Zeichen, wobei die 18stellige Kontoidentifikation (BBAN) aus der achtstelligen Bankleitzahl (BLZ) und der bis zu zehnstelligen Kontonummer, die ggfs. mit führenden Nullen bestückt wird, in dieser Reihenfolge gereiht wird. Der Ländercode lautet "DE".

   (a) Um die Prüfziffer zu berechnen, wandelt man nun den alphanumerischen Ländercode gemäß dem Schema "$A = 10$", "$B = 11$",..., "$Z = 35$" in einen rein numerischen Code um und ergänzt ihn durch zwei angehängte Nullen und setzt dies ans Ende der BBAN, womit sich nun die 24stellige Prüfsumme P ergibt. Dann folgt für die Prüfziffer $PZ = 98-(P \bmod 97)$, wobei, falls die Prüfziffer einstellig ist, diese durch eine führende Null ergänzt wird.
   Ein Teilnehmer des internationalen Bankverkehrs möchte von seinem Konto 344 375 005 bei der Volksbank Bad Saulgau eine Überweisung auf das Konto 40 747 000 bei der Raiffeisenbank Aulendorf tätigen. Bestimme die beiden notwendigen IBAN.

   (b) Die Prüfung der IBAN erfolgt durch Betrachtung einer Zahl N, die entsteht, indem ihre ersten vier Stellen hinter die BBAN ans Ende verschoben und die Buchstaben wieder durch die korrespondierenden Ziffern ersetzt werden. Die IBAN ist gültig, wenn $N \equiv 1 \bmod 97$ gilt.
   Ein weiterer Teilnehmer hat Probleme, eine Überweisung auszuführen.
   Er gibt das Konto DE35 6505 0110 0086 1516 50 und DE11 6509 2200 0005 9980 06 als das Empfängerkonto ein, wobei er sich einmal vertippt hat. Welche IBAN ist falsch? (6 Punkte)

3. Wir betrachten Lösungen der Diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$.
   Eine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ dieser Gleichung wird pythagoräisches Tripel genannt
   Gilt zudem $ggT(x, y, z) = 1$, so nennt man es ein primitives pythagoräisches Tripel.

   (a) Es sei (x, y, z) ein pythagoräisches Tripel und $d \in \mathbb{N}$.
   Zeige, dass dann auch (dx, dy, dz) ein pythagoräisches Tripel ist.

   (b) Zeige, dass bei einem primitiven pythagoräischen Tripel z ungerade ist.

   (c) Zeige, dass (x, y, z) genau dann ein primitives pythagoräisches Tripel ist, wenn $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ und $z = m^2 + n^2$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, $ggT(m, n) = 1$ und $m \neq n \bmod 2$ gilt.

   (d) Bestimme vier primitive pythagoräische Tripel, wobei eines die Zahl 1280 enthalten muss.

   (e) Gib im Falle der Existenz ein primitives pythagoräisches Tripel an, welches die Zahl 103 enthält.

   (f) Zeige, dass (p, ν, q) mit $p, q \in \mathbb{P}$ genau dann ein primitives pythagoräisches Tripel darstellt, wenn $2q = p^2 + 1$ gilt. (15 Punkte)