Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 24. Mai 2016, vor den Übungen

1. (a) Bestimme die Anzahl der Lösungen von $P(x) \equiv 0 \bmod 60$ mit $P(x) = 23x^3 + 6x^2 + 5x + 2$.
   (b) Bestimme die kleinste positive Lösung von $x \equiv 3 \bmod 7$, $x \equiv 2 \bmod 3^2$ und $x \equiv 5 \bmod 2^5$.
   (c) Der preußische Generalfeldmarschall Gebhard Leberecht von Blücher ruft die soeben frisch eingetroffenen Soldaten vor der Schlacht bei Waterloo am 18. Juni 1815 zum Appell.
   Lässt er die Rekruten in Zwölfer- Reihen antreten, bleibt ein Soldat übrig, bei 13er- Reihen sind es elf und bei 25er- Reihen schließlich zwölf.
   Von König Friedrich Wilhelm III. hat Blücher erfahren, dass er zwischen 5000 und 10 000 neue Soldaten zur Verfügung hat, um General Wellington an diesem Sonntag zu unterstützen.
   Welche Anzahl neuer Soldaten lässt Blücher formieren? (10 Punkte)

2. Wenn bei einem System von Kongruenzen die Moduln nicht paarweise teilerfremd sind, können zwei verschiedene Fälle auftreten:
   - Die Kongruenzen beinhalten einen Widerspruch. In diesem Fall existiert keine Lösung.
   - Die Kongruenzen beinhalten keinen Widerspruch.
     Nun kann das System von Kongruenzen durch ein äquivalentes System von Kongruenzen mit paarweise teilerfremden Moduln ersetzt und mit dem Chinesischen Restsatz gelöst werden.

   (a) Führe das Paar an Kongruenzen 75 mod 148 und 370 mod 851 auf eine gemeinsame Kongruenz modulo des größten gemeinsamen Teilers ihrer Moduln zurück und zeige ihre Unlösbarkeit.
   (b) Schreibe das Paar von Kongruenzen 5 mod 96 und 38 mod 63 in ein System von Kongruenzen mit paarweise teilerfremden Moduln um und gib eine Lösung hiervon an. (5 Punkte)

3. (a) Zeige: Ist $2^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann gilt $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die k- te Fermatzahl F_k durch $F_k := 2^{2^k} + 1$.
   Bestimme die ersten fünf Fermatzahlen.
   (c) Zeige $F_k = F_0 \cdots F_{k-1} + 2$ für $k \geq 1$.
   (d) Zeige, dass $ggT(F_k, F_l) = 1$ für $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $k \neq l$ gilt.
   (e) Folgere aus dem Ergebnis von Teilaufgabe d), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
   (f) Auf Carl- Friedrich Gauß geht folgender Satz zurück:
   Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein regelmäßiges Polygon mit n Ecken ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form
   $$n = 2^m \cdot \prod_{k \in I} F_k$$
   mit $m \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{N}_0$ sowie paarweise verschiedenen Primzahlen der Bauart F_k ist.
   Für welche $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq n \leq 34$ ist das regelmäßige Polygon mit n Ecken mit Zirkel und Lineal konstruierbar? (9 Punkte)