Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 31. Mai 2016, vor den Übungen

1. Ergänze die Mengen

   (a) $\{3, 7, 15, 38, 101\}$ mit Primzahlen zu einem vollständigen Restsystem modulo 11

   (b) $\{73, 91, 101, 137\}$ zu einem reduzierten Restsystem modulo 30. (6 Punkte)

2. Wir betrachten folgende zahlentheoretische Funktionen: die Einsfunktion $1(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Potenzfunktion $p(n) := p^n$ mit $p \in \mathbb{P}$, die Logarithmusfunktion $\log(n) := \log n$ sowie

$$\epsilon(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   die von- Mangoldt- Funktion $\Lambda(n)$ von Übungsblatt 2 und die Möbiusfunktion

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & \text{falls } n = p_1 \cdots p_r \text{ mit paarweise verschiedenen } p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Berechne $\mu(n)$ und $\Lambda(n)$ für $n \in \{167, 168, 169\}$ mit $167 \in \mathbb{P}$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ und $169 = 13^2$.

   (b) Es bezeichne A die Menge der zahlentheoretischen Funktionen. Unter der Faltung $\star$ zweier zahlentheoretischer Funktionen f und g versteht man die zahlentheoretische Funktion

$$(f \star g)(n) := \sum_{d|n} f(d) \cdot g(n/d).$$

   Zeige, dass $(A, +, \star)$ einen kommutativen Ring mit Einselement ϵ bildet.

   (c) Zeige, dass die Möbiusfunktion $\mu(n)$ multiplikativ ist, die Logarithmusfunktion $\log(n)$ vollständig additiv und die von- Mangoldt- Funktion $\Lambda(n)$ weder additiv noch multiplikativ ist.

   (d) Zeige, dass $\mu \star 1 = \epsilon$ gilt.

   Hinweis:
   Die Faltung multiplikativer Funktionen ist multiplikativ (darf ohne Beweis genützt werden).

   (e) Es seien f und g zahlentheoretische Funktionen. Zeige die Äquivalenz folgender Beziehungen:

   i. Es gilt $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   ii. Es gilt $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (f) Es sei $p \in \mathbb{P}$. Zeige, dass $(\mu \star p)(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   Hinweis:
   Es darf ohne Beweis $p^n = \sum_{d|n} d \cdot I_p(d)$ mit $I_p(d) \in \mathbb{Z}$ genützt werden. (11 Punkte)

3. (a) Bestimme die Werte der Eulerschen φ- Funktion für $n \in \{577, 1280, 2016\}$.

   (b) Zeige, dass $\varphi(n)$ für $n \geq 3$ immer gerade ist. (7 Punkte)