Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte, alles Zusatzpunkte
Abgabe: Mittwoch, 19. Juli 2017, vor den Übungen

1. Es seien $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeige folgende Aussagen:

   (a) Es sind $\log p_1, \dots, \log p_r \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.

   (b) Ist $\sigma_0 > 1$, so gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit
   $$\left| \prod_{j=1}^{r} \left(1 - p_j^{-(\sigma_0+it)}\right) \right| \geq (1-\epsilon) \cdot \prod_{j=1}^{r} \left(1 + p_j^{-\sigma_0}\right).$$
   Hinweis:
   Verwende den Approximationssatz von Kronecker vom vergangenen Übungsblatt.

   (c) Für alle $\epsilon > 0$ und $\sigma_0 > 1$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ und ein $r \in \mathbb{N}$ mit
   $$|\zeta(\sigma_0 + it)|^{-1} \geq (1-\epsilon) \cdot \prod_{j=1}^{r} \left(1 + p_j^{-\sigma_0}\right).$$

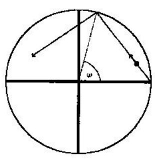
   (d) Die Funktion $|\zeta(s)|^{-1}$ ist für alle festen $\sigma_0 > 1$ im Streifen $1 < \Re(s) \leq \sigma_0$ unbeschränkt.

   Hinweis:
   Es darf dabei ohne Beweis verwendet werden, dass die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergiert.

   (e) Die Funktion $|\zeta(1+it)|^{-1}$ ist in t unbeschränkt.

   Hinweis:
   Es darf ohne Beweis der Satz von Phragmén- Lindelöf verwendet werden:
   Es seien $\sigma_1(t)$ und $\sigma_2(t)$ für $t > t_0$ stetig mit $\beta_1 \leq \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \leq \beta_2$ mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Es sei $B = \{\sigma + it \colon t > t_0,\ \sigma_1(t) < \sigma < \sigma_2(t)\}$ und f eine Funktion, die auf einem Gebiet holomorph ist, das $\overline{B}$ enthält. Weiter gelte $|f(s)| < A \cdot \exp(e^{ct})$ mit $0 < c < \pi \cdot (\beta_2 - \beta_1)^{-1}$ für alle $s \in B$. Gilt dann $|f(s)| \leq C$ auf dem Rand von B gilt, so auch auf $\overline{B}$. (16 Punkte)

2. Eine Kugel werde im Punkt $(1,0)$ in den reellen Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ geschossen, so dass $(1,0)$ und ihr erster Aufschlagpunkt den Winkel ω (im Bogenmaß) einschließen.



   Wir vernachlässigen die Größe der Kugel, die Reibung und die Elastizität und nehmen an, dass die Kugel mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der sie am Kreis auftritt, wieder reflektiert wird. Es bezeichne (x_n, y_n) den n- ten Aufschlagpunkt mit $(x_0, y_0) = (1,0)$. Zeige: Gilt $\omega = 2\pi\alpha$ mit irrationalem α, so sind die Aufschlagpunkte auf dem Einheitskreis gleichverteilt. (8 Punkte)