Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 10. Mai 2017, vor den Übungen

1. Es sei $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ mit $q \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $g_n = n \cdot l \bmod q$.

   (a) Beweise, dass eine Untergruppe $U \leq G$ existiert, so dass $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ auf U gleichverteilt ist. Beschreibe U mittels $d := ggT(l, q)$.

   (b) Zeige $N(x, g) := |\{n \leq x : g_n \in U\}| = x/|U| + O(1)$.

   (c) Zeige, dass für jedes $\chi \in \hat{G}$
   $$\sum_{n \leq x} \chi(g_n) = c(\chi)x + O_q(1)$$
   für $x \to \infty$ mit einer passenden Konstanten $c(\chi)$ gilt. (15 Punkte)

2. Es sei $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \in \mathbb{C}$.
   Weiter sei $x \geq 1$ und $N = \sum_{n \leq x} a_n$. Für $0 \leq r \leq q-1$ seien
   $$N(q,r) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \bmod q}} a_n \qquad \text{und} \qquad S(\alpha) := \sum_{n \leq x} a_n e(n\alpha).$$
   Zeige
   $$\sum_{r \bmod q} \left| N(q,r) - \frac{N}{q} \right|^2 = \frac{1}{q} \cdot \sum_{m=1}^{q-1} \left| S\left(\frac{m}{q}\right) \right|^2.$$
   (9 Punkte)