Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Mittwoch, 17. Mai 2017, vor den Übungen

1. (a) Zeige die zweite Möbiussche Umkehrformel:
   Die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:
   i. $F(x) = \sum_{n \leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$
   ii. $G(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \geq 1$.

   (b) Zeige
   $$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1)$$
   für $x \to \infty$. (7 Punkte)

2. Es sei $(A, +, \star)$ der Ring der arithmetischen Funktionen und $(D, +, \cdot)$ der Ring der (formalen) Dirichletreihen. Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) Die Zuordnung $\Phi\colon A \to D$ mit
   $$f \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$
   erfüllt $\Phi(f \star g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$.

   (b) Für jede vollständig multiplikatve Funktion f gilt $(f \cdot \mu) \star f = \epsilon$.

   (c) Die Operatoren *Ableitung* $F \to F'$ und *logarithmische Ableitung* $F \to \frac{F'}{F}$ sind auch für arithmetische Funktionen definiert.
   Beschreibe nun die Wirkung dieser beiden Operatoren auf vollständig multiplikative Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

   (7 Punkte)

3. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass eine Konstante $C(\alpha) > 0$ existiert, so dass
   $$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) = C(\alpha) \cdot x \cdot (\log x)^{-\alpha} \cdot (1 + o(1))$$
   für $x \to \infty$ gilt. (4 Punkte)

4. Es sei $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass aus
   $$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + o\left(\frac{1}{\log x}\right)$$
   für $x \to \infty$ der Primzahlsatz folgt. (6 Punkte)