Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte, davon sechs Zusatzpunkte
Abgabe: Mittwoch, 31. Mai 2017, vor den Übungen

1. Im folgenden sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.
   Es bedeute $A(x) := \sum_{a_n \le x} 1$ die Zählfunktion der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
   Konstruiere Folgen mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Es ist
   $$\sum_{a_n \le x} \frac{1}{a_n} = \log\log x + O(1).$$
   Es gibt beliebig große Werte von x mit $A(x) \ge \frac{x}{2}$ und beliebig große Werte mit $A(x) \le x^{1/2}$.

   Hinweis:
   Es sei $y_m := \exp\exp(m)$ und
   $$\mathfrak{A} = \bigcup_{m=0}^{\infty} (y_m, ey_m] \cap \mathbb{N}.$$
   Die Folge werde von den der Größe nach geordneten Elementen von $\mathfrak{A}$ gebildet.

   (b) Es ist
   $$\sum_{a_n \le x} \frac{\log a_n}{a_n} = \log x + O(1).$$
   Für $C \ge 1$ gibt es beliebig große Werte von x mit $A(x) \ge C\frac{x}{\log x}$ und beliebig große Werte mit $A(x) \le \frac{1}{C}\frac{x}{\log x}$.

   Hinweis:
   Es sei $B \ge 10$, $\eta \ge 2^B$, $z_m := \eta^m$ sowie $w_{m,l} := \frac{\log([z_m]+l)}{[z_m]+l}$ und
   $$\mathfrak{A} = \bigcup_{m=10}^{\infty} \{w_{m,l} \colon 1 \le l \le k_m\},$$
   wobei k_m die größte Zahl mit
   $$\sum_{l=1}^{k_m} w_{m,l} \le B$$
   ist. Die Folge werde von den der Größe nach geordneten Elementen von $\mathfrak{A}$ gebildet.

   (c) Es sei
   $$\sum_{a_n \le x} \frac{\log a_n}{a_n} = \log x + O(1).$$
   Zeige:
   Existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x/\log x} = a$, so ist notwendigerweise $a = 1$. (8 Punkte)

2. (a) Es sei $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ eine Dirichletreihe.

   i. Zeige, dass eine absolute Konvergenzabszisse $\sigma_{ab} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert, so dass $D(s)$ für $\sigma > \sigma_{ab}$ absolut konvergiert und für $\sigma < \sigma_{ab}$ nicht absolut konvergiert.

   ii. Zeige, dass zwischen σ_{ab} und σ_c die Beziehung $\sigma_c \leq \sigma_{ab} \leq \sigma_c + 1$ besteht.

   (b) i. Stelle $E(s) := \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s)$ für $\sigma > 1$ als Dirichletsche Reihe dar.

   ii. Zeige, dass $E(s)$ die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_{ab} = 1$ und Konvergenzabszisse $\sigma_c = 0$ besitzt.

(7 Punkte)

3. Es seien die Voraussetzungen der Eulerschen Summenformel gegeben.

   (a) Zeige
$$\int_c^d g(u)\, du + \int_c^d P_0(u) g'(u)\, du = P_0(d)g(d) - P_0(c)g(c)$$
   für $n \leq c \leq d < n+1$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Zeige die Eulersche Summenformel. (7 Punkte)

4. Es sei $\tau(n)$ die gewöhnliche Teilerfunktion. Zeige:

   (a) $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \sum_{n:\, m \cdot n \leq x} 1 - [\sqrt{x}]^2$

   (c) $\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{1/2}\right)$

   <u>*Hinweis:*</u>
   Dabei ist
$$\gamma = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right) = 1 - \int_1^{\infty} \frac{u - [u]}{u^2}\, du$$
   die Euler- Mascheroni- Konstante. (8 Punkte)