

Langlebigkeitsbonds - Bewertung, Modellierung und Aspekte für deutsche Daten

Ralf Korn, Kalina Natcheva (Kaiserslautern)
und *Jörg Zipperer* (München)*

1 Einleitung

Die größten Risikofaktoren bei der Bestimmung der Prämie eines Lebensversicherungsvertrags sind das Zinsrisiko und das Langlebigkeitsrisiko. Während durch einen reichhaltigen Markt an Zinsderivaten und ein immer größer werdendes Angebot für langlaufende Bonds dem Zinsrisiko begegnet werden kann, sind Hedging-Möglichkeiten für das Langlebigkeitsrisiko so gut wie nicht vorhanden. Dabei versteht man unter dem Langlebigkeitsrisiko den ungewissen Zuwachs der Lebenserwartung über die Zeit.

Der Versicherer sieht sich daher, insbesondere bei Verträgen mit Verrentungsoption, dem Problem ausgesetzt, die Lebenserwartung über einen langen Zeitraum im Voraus abzuschätzen und in der Tarifierung zu berücksichtigen. Üblicherweise wird diese Abschätzung nur in loser Folge vorgenommen und in der Zwischenzeit die Lebenserwartung als unverändert angenommen. Wie Untersuchungen des Statistischen Bundesamtes zeigen, nimmt die Sterblichkeit aber kontinuierlich ab, so dass Versicherungsverträge tendenziell unterpreist werden. Im Extremfall reicht dann die Versicherungsprämie nicht aus, die Versicherungsleistung zu bedienen.

Dass den Versicherern dieses Problem aber nicht unbekannt ist, zeigt die Tatsache, dass in den letzten Jahren Kapitalmarktprodukte zur Absicherung von Langlebigkeitsrisiken auf dem Markt zu finden sind. So emittierte im Jahre 2003 die Swiss-Re einen Mortalitätsbond, um das Langlebigkeitsrisiko ihres Versichertenbestandes über den Kapitalmarkt an Investoren zu übertragen. Ein Beispiel aus jüngerer Zeit sind EIB/BNP Paribas, die einen Langlebigkeitsbond auf den UK Markt brachten (vgl. Blake, Cairns und Dowd (2006) für eine detaillierte Beschreibung der genannten Bonds oder Cowley und Cummins (2005)). Eine Erörterung des (systematischen) Unterschieds zwischen Mortalitäts- und Langlebigkeitsbonds findet sich am Ende dieser Arbeit.

Die beiden genannten Produkte werden voraussichtlich nicht die einzigen Produkte auf dem Markt bleiben, die Sterblichkeit als Referenzindex einsetzen. Um die Vorteilhaftigkeit solcher Produkte, die sich vordringlich im Preis widerspiegelt, beurteilen zu können, bedürfen potentielle Investoren eines Bewertungsmodells. Die Bereitstellung eines einfachen, aber bezüglich des verwendeten Mortalitätsmodells flexiblen Bewertungsansatzes, der auch z.T. Ideen von Cairns, Blake und Dowd (2005) oder Milevsky und Promislow (2001) aufgreift, ist Ziel der vorliegenden Arbeit. Zusätzlich werden wir ein weiteres Modell – eine stochastische Variante des

*E-Mail: korn@mathematik.uni-kl.de, kalina.natcheva@itwm.fraunhofer.de,
Joerg.Zipperer@hvb.de

bekanntem Gompertz-Ansatzes – entwickeln, dass sich in natürlicher Art und Weise zur Modellierung der Entwicklung von Langlebigkeit anbietet, sehr zufriedenstellende Resultate bei der Anwendung auf reale Daten liefert und gegenüber anderen Modellen eine sparsame Parametrisierung aufweist.

Wir weisen insbesondere darauf hin, dass bei der Bewertung folgende explizite Schwierigkeiten/Besonderheiten zu berücksichtigen sind:

- Eine verlässliche (implizite) Kalibrierung der Überlebensparameter auf der Basis von Preisen entsprechender Derivate (wie z.B. bei der Kalibrierung von Zinsparametern am Finanzmarkt) ist aufgrund des nicht vorhandenen zugehörigen Marktes und damit auch der Nichthandelbarkeit des Langlebigkeitsrisikos nicht möglich.
- Dem Trend zu einer höheren Lebenserwartung muss bei der Bewertung des Bonds explizit Rechnung getragen werden.
- Zur gleichzeitigen Bewertung des Zinsrisikos und des Langlebigkeitsrisikos muss eine Kombination aus finanzmathematischen und aktuariellen Bewertungsprinzipien gefunden werden.

Hierbei soll noch einmal deutlich darauf hingewiesen werden, dass nur die sich in der Zeit verändernde Mortalitätskurve die Bewertung von Langlebigkeitsbonds überhaupt erst zu einer untersuchenswerten Aufgabe macht. Würde nämlich die Mortalitätskurve auch in der Zeit (= Kalenderzeit) durch eine vorhandene Sterbetafel exakt beschrieben, so wäre das Mortalitätsrisiko (bei einer hinreichend großen Population, die die Basis für die Zahlungskriterien des Langlebigkeitsbonds darstellt) direkt durch Verwendung der sich aus der Sterbetafel ergebenden Überlebenswahrscheinlichkeiten bewertbar. Um allerdings eine systematische Fehlbewertung der zukünftigen Zahlungen des Langlebigkeitsbonds zu vermeiden, muss ein Konzept zur Berücksichtigung der zeitlichen Dynamik der Mortalitätskurve verwendet werden. Hierbei bieten sich (mindestens) zwei Ansätze an:

- Extrapolation der Mortalitätskurve aus vergangenen, realisierten Mortalitäten,
- Modellierung der Mortalitätsentwicklung als stochastischer Prozess und Monte Carlo Simulation zukünftiger Mortalitäten.

Wir werden in den folgenden Abschnitten zunächst den von uns betrachteten Typ von Langlebigkeitsbond vorstellen, danach verschiedene Mortalitätsratenmodelle und ihre zeitlich dynamischen Varianten betrachten und schließlich Methoden zur Bewertung des Bonds vorschlagen.

2 Langlebigkeitsbonds und Überlebenswahrscheinlichkeiten

Wir wollen hier zunächst als Basisprodukt den von uns zu bewertenden Langlebigkeitsbond vorstellen, der sich in seiner Form an bereits auf dem Finanzmarkt

erschienenen orientiert. Im Gegensatz zu dem von EIB/BNP Paribas emittierten Produkt, basieren die Kuponzahlungen des hier beschriebenen Langlebigkeitsbonds auf tatsächlich realisierter Sterblichkeit (vgl. hierzu auch Blake, Cairns und Dowd (2006)).

Hierzu betrachten wir eine Referenzkohorte, deren Mitglieder beim Ausgabezeitpunkt $t = 0$ des Bonds alle das Alter $x (> 0)$ haben. Die Kuponzahlungen $S_x(t_i)$ des Langlebigkeitsbonds in den Zeitpunkten $t_i = i, i = 1, \dots, N$, sind durch den Anteil der Überlebenden der Kohorte an den jeweiligen Zeitpunkten gegeben, so dass wir der Einfachheit halber annehmen, dass

$$S_x(i) = \frac{\text{Anzahl der Überlebenden der Kohorte zur Zeit } i}{\text{Kohortengröße zur Zeit } 0} \quad (2.1)$$

gilt (d.h. wir setzen $S_x(0) = 1$). Hierbei muss natürlich die Überprüfbarkeit dieser Größe (z.B. auf der Basis der vom Statistischen Bundesamt veröffentlichten Zahlen) sichergestellt und klar geregelt sein. Für die weiteren Schritte zur Bewertung des Langlebigkeitsbonds machen wir die folgende Annahme:

$$\text{Zins- und Langlebigkeitsrisiko sind unabhängig.} \quad (2.2)$$

Diese Annahme impliziert direkt, dass sich die Barwerte der Kuponzahlungen $S(i)$ des Langlebigkeitsbonds unter einem geeigneten Bewertungsmaß (wie dieses aussieht, wird für den Moment nicht diskutiert, detailliertere Überlegungen zur Bewertung erfolgen in Abschnitt 4) als

$$E \left(\exp \left(- \int_0^i r(s) ds \right) S_x(i) \right) = P(0, i) E(S_x(i)) \quad (2.3)$$

ergeben, wobei die $P(0, i)$ Marktpreise von Nullkuponanleihen mit Laufzeit i sind. Weiter gilt mit der Bezeichnung¹

$$p(t, T_0, T_1, x) = P(\text{Ind. lebt in } T_1 | \text{Ind. lebt in } T_0, \text{ Ind. hat in } 0 \text{ Alter } x, f_t) \quad (2.4)$$

für Zeiten t, T_1, T_0 mit $t \geq T_1, T_0 < T_1$ (und f_t die σ -Algebra, die die vollständige bis zur Zeit t verfügbare Information über die (Zins - und) Mortalitätsunsicherheit beinhaltet) auch direkt

$$E(S_x(i)) = p(0, 0, i, x); \quad (2.5)$$

eine Beziehung, die sich aus (2.1) und der Linearität des Erwartungswerts ergibt. Da sich der Index x immer aus dem Kontext ergibt, lassen wir ihn im Folgenden in der Regel entfallen und schreiben $S(i)$ anstelle von $S_x(i)$.

¹Cairns, Blake und Dowd (2005) bezeichnen diese Wahrscheinlichkeiten als *forward survival probabilities*.

Würde man davon ausgehen, dass auch die zukünftigen Sterblichkeiten durch eine heute gültige Sterbetafel adäquat abgebildet werden, so könnte man aus dieser direkt die Werte $p(0, 0, i, x)$ - üblicherweise mit ${}_i p_x$ bezeichnet - entnehmen und mittels (2.5) hätte man dann als fairen Preis für den Langlebigkeitsbond

$$\sum_{i=1}^n P(0, i) {}_i p_x \quad (2.6)$$

erhalten. Hierbei ist zu beachten, dass der Wert von $S(i)$ von der Kalenderzeit abhängt – man fixiert eine Kohorte zum Zeitpunkt $t = 0 -$, während ${}_i p_x$ davon unabhängig ist. Generationentafeln können dieses Problem zwar überwinden, jedoch nicht das prinzipielle Problem, das mit dem Einsatz von Sterbetafeln einher geht. Da empirisch eine Tendenz zur Langlebigkeit beobachtet werden kann (siehe z.B. Olivieri (2001)) wird durch die Verwendung einer heutigen (und somit die Überlebenswahrscheinlichkeiten unterschätzenden (!)) Sterbetafel dem Langlebigkeitsbond ein zu niedriger Wert zugeordnet. Um dem Rechnung zu tragen, müssen zeitabhängige Überlebenswahrscheinlichkeiten modelliert werden. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, dass man bereits in der Vergangenheit realisierte Überlebenswahrscheinlichkeiten (bzw. genauer deren empirische Gegenstücke)

$${}_i p_x(t) = \frac{\text{Anz. der zur Zeit } t+i \text{ (} x+i \text{)-Jährigen}}{\text{Anzahl der zur Zeit } t \text{ } x\text{-Jährigen}}, \quad t \in \{-(i+1), \dots, -N_i\} \quad (2.7)$$

als Werte einer Funktion der Zeit auffasst, hieraus durch geeignete Interpolation (z.B. Spline- oder Polynominterpolation) diese Funktion approximiert und aus der Interpolationsfunktion $f_x^{(i)}(\cdot)$ mittels Extrapolation die benötigten Schätzer

$${}_i \hat{p}_x(0) = f_x^{(i)}(0), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

erhält. Diese Methode wird von uns in der vorliegenden Arbeit nicht weiterverfolgt (siehe Olivieri und Pitacco (2003) oder Pitacco (2005) für weitere Details in diese Richtung). Statt dessen werden wir einen stochastischen Modellierungsansatz vorstellen, der auf Varianten traditioneller Mortalitätsgesetze aufbaut.

3 Langlebigkeitsbonds und dynamische Mortalitätsmodellierung

Eine zur Extrapolation alternative Methode, die auch für einen Spezialfall bereits in Cairns, Blake und Dowd (2005) zur Bewertung des BNP-Langlebigkeitsbonds angewendet wurde, basiert auf der Beschreibung der Überlebenswahrscheinlichkeiten durch eine parametrische Darstellung der Mortalitätsraten. Hierbei gehen die klassischen Mortalitätsgesetze immer von (kalender-) zeitunabhängigen Überlebenswahrscheinlichkeiten aus und die Mortalitätsraten sind definiert durch

$${}_i p_x = \exp \left(- \int_0^i \mu_{x+s} ds \right) \quad (3.1)$$

das heißt, die Mortalitätsrate μ_x hängt nur vom Alter x der einzelnen Person ab. Um parametrische Darstellungen für die Entwicklung der Mortalitätsraten mit wachsendem Alter der Person (insbesondere auch für nicht-ganzzahlige x) zu erhalten, wurden in der Geschichte der Versicherungsmathematik vielfältige Ansätze gemacht (siehe z.B. Pitacco (2005) für einen historischen Überblick). Populäre Ansätze für solche parametrischen Darstellungen (auch „Mortalitätsgesetze“ genannt) sind z.B. durch

$$\mu_x^{(G)} = \alpha e^{\beta x}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (\text{Gompertz-Modell}) \quad (3.2)$$

$$\mu_x^{(M)} = \alpha e^{\beta x} + \gamma, \quad \alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0 \quad (\text{Makeham-Modell}) \quad (3.3)$$

$$\mu_x^{(T)} = \alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{-\beta_2 (x-\eta)^2} + \alpha_3 e^{\beta_3 x}, \quad \alpha_i, \beta_i, \eta \geq 0 \quad (\text{Thiele-Modell}) \quad (3.4)$$

gegeben, wobei natürlich das Thiele-Modell die beiden anderen als Spezialfälle enthält. Eine andere Art der Verallgemeinerung von Makehams Modell, die im weiteren Verlauf noch eine Rolle spielen wird, ist das Modell nach Perks (siehe Perks (1932)), dessen Mortalitätsrate die folgende Gestalt besitzt:

$$\mu_x^{(P)} = \frac{\alpha e^{\beta x} + \gamma}{1 + \delta e^{\beta x} + \varepsilon e^{-\beta x}}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \geq 0. \quad (3.5)$$

Da all diese Modelle wohlbekannt sind, wollen wir hier nicht weiter auf ihre einzelnen Vor- und Nachteile eingehen, sondern dafür auf die Standardliteratur (z.B. Benjamin und Pollard (1993)) verweisen. Unter der Annahme der Gültigkeit dieser klassischen Mortalitätsgesetze erhält man mittels einfacher Integration aus (2.5), (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) z.B. für den Gompertz-, den Makeham und den Perks-Fall geschlossene Formeln für $S(i)$:

Proposition 1 *Unter der Annahme der Gültigkeit einzelner Mortalitätsgesetze gilt für die (bedingten) Überlebenswahrscheinlichkeiten bis zum Alter $x + i$*

a) *im Gompertz-Modell:*

$$E(S_x(i)) = {}_i p_x = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^{\beta i} - 1)\right), \quad (3.6)$$

b) *im Makeham-Modell:*

$$E(S_x(i)) = {}_i p_x = \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^{\beta i} - 1) + \gamma i\right)\right), \quad (3.7)$$

c) *im Perks-Modell für den Spezialfall $\gamma = \varepsilon = 0$*

$$E(S_x(i)) = {}_i p_x = e^{-\frac{\alpha i}{\delta}} \left(\frac{1 + \delta e^{\beta x}}{1 + \delta e^{\beta(x+i)}}\right)^{\frac{\alpha i}{\delta}}. \quad (3.8)$$

Proposition 1 zeigt insbesondere, dass man zur Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten lediglich die Parameter der verschiedenen Gesetze aus der Vergangenheit über die realisierten Wahrscheinlichkeiten (genauer: die beobachteten relativen Häufigkeiten) schätzen muss. Auf die dabei auftretende Schätzproblematik (evtl. wenige oder aber überlappende Daten, ...) wollen wir nicht eingehen, sondern uns der Modellierung dynamischer Varianten der oben erwähnten Mortalitätsgesetze zuwenden, die in der Lage sind, auch einen Trend zur Langlebigkeit zu beschreiben. Hierbei besteht die einfachste Variante darin, sich für ein Mortalitätsgesetz zu entscheiden und die einzelnen konstanten Parameter durch zeitabhängige Funktionen zu ersetzen. Diese Vorgehensweise entspricht dem bereits am Ende des letzten Paragraphen beschriebenen Interpolationsverfahrens mit anschließender Extrapolation, wobei auch nicht unbedingt einzusehen ist, dass sie diesem überlegen sein soll. Wir wollen hier einen anderen Ansatz verfolgen, bei dem wir die Parameter der Mortalitätsgesetze durch stochastische Prozesse ersetzen, die wiederum eindeutig durch die Angabe eines Parametervektors θ beschrieben werden können (z.B. eine Brownsche Bewegung mit Drift ν und Volatilität σ , also $\theta = (\nu, \sigma)$). Die Mortalitätsraten sind dann stochastische Prozesse der Form

$$\mu_x(t) = \mu_x(t; \theta) \quad (3.9)$$

und für die heutigen Überlebenswahrscheinlichkeiten eines x -Jährigen bis zur Zeit t gilt dann

$${}_t p_x(0) := p(0, 0, t, x) = E(S(t)) = E\left(\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}(s) ds\right)\right). \quad (3.10)$$

Der eindeutige Vorteil dieser Methode besteht darin, dass es nach Festlegung des Parametervektors θ möglich ist, zukünftige Mortalitätsszenarien durch Monte Carlo Simulationen zu beschreiben und dabei zusätzlich zu Punktschätzern für die benötigten Überlebenswahrscheinlichkeiten sogar Konfidenzintervalle angeben zu können. Um diese Methode zu realisieren, lässt sich der folgenden Algorithmus formulieren (der in seiner Grundidee auf Lee und Carter (1992) basiert):

Algorithmus „Stochastische Modellierung von Mortalitätsraten“

0. Wähle eine parametrisierte stochastische Form für das zu verwendende Mortalitätsgesetz (bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeiten).
1. Bestimme aus vorhandenen Sterblichkeitsraten die realisierten Mortalitätsraten (bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten).
2. Passe den stochastischen Prozess, der dem in 1. gewählten Mortalitätsgesetz zugrunde liegt, an die Zeitreihe der Mortalitätsraten (bzw. der Überlebenswahrscheinlichkeiten) an.

Nach erfolgter Anpassung des stochastischen Prozesses im 2. Schritt kann das dann vollständig spezifizierte stochastische Mortalitätsgesetz für Monte Carlo Simulationen verwendet werden. Beispiele, die einen solchen Ansatz verfolgen, sind:

Beispiel 1: Zeitabhängiges Perks-Modell (vgl. Cairns, Blake und Dowd (2005))
 Hier schlagen die Autoren eine zeitdiskrete Modellierung vor und passen eine diskret beobachtete zwei-dimensionale Brownsche Bewegung mit Drift an realisierte Überlebenswahrscheinlichkeiten an. Genauer bezeichnen Sie mit $p(t+1, t, t+1, x)$ den Anteil an den zum Zeitpunkt $t \geq 0$ lebenden Mitgliedern einer Kohorte, die zum Zeitpunkt 0 alle ein Alter von x hatten und auch noch den Zeitpunkt $t+1$ erleben. Für jeden vergangenen Zeitpunkt t und alle vorhandenen Anfangsalter $x > 0$ werden dann zunächst mittels Kleinster-Quadrate-Schätzung und dem Ansatz

$$\hat{p}(t+1, t, t+1, x) = \frac{1}{1 + e^{A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+t)}} \quad (3.11)$$

die Werte $(A_1(t), A_2(t))$ bestimmt. Hierbei wird von Cairns, Blake und Dowd (2005) angenommen, dass der A -Prozess der Beziehung

$$A(t+1) = A(t) + \nu + CZ(t+1), \quad \nu \in \mathbb{R}^2, C \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

genügt, wobei C eine obere Dreiecksmatrix ist und der Z -Prozess aus den Zuwächsen einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung zwischen t und $t+1$ besteht. Dabei beschreibt der A_1 -Prozess die zeitliche Entwicklung der allgemeinen, altersunabhängigen Sterblichkeit, während der A_2 -Prozess die zeitliche Entwicklung der altersabhängigen Sterblichkeit repräsentiert. Hat man somit alle vergangenen Werte für den A -Prozess bestimmt, so lassen sich die Parameter ν und C aus ihren Eigenschaften als Erwartungswert, Varianz und Kovarianz der Zuwächse des A -Prozesses mit der Maximum-Likelihood-Methode (oder – unter der Annahme der Normalverteilung äquivalent dazu – der Kleinsten-Quadrate-Methode) schätzen. Dies geschieht im folgenden für Daten aus Deutschland aus den Jahren 1993-2004 vom Statistischen Bundesamt veröffentlicht, wobei wir als Referenzpopulation die deutschen Männer im Alter von 60-89 wählen und die folgenden Werte erhalten:

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} -0.05959 \\ 0.0004465 \end{pmatrix}, \quad \widehat{CC^T} = \begin{pmatrix} 0.000842388 & -0.00001004 \\ -0.00001004 & 0.000000124 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(2004) = \begin{pmatrix} -10.65677 \\ 0.102009 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sollte einen der sehr kleine Wert der Kovarianz zwischen den Prozessen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ nicht darüber hinweg täuschen, dass die Korrelation zwischen den Prozessen -0.98238 beträgt, man also fast von linear abhängigen Faktoren ausgehen kann. Weiter zeigt die Kovarianzmatrix, dass sich beide Prozesse fast deterministisch in der Zeit entwickeln, was durch (nachträgliches) Glätten der Daten durch das statistische Bundesamt verursacht werden könnte. Zum Vergleich geben wir ebenfalls die Schätzer für deutsche Männer gleichen Alters der Jahre 1991-2002 an, die

auf den historischen Mortalitätsraten basieren, die von Human Mortality Database angegeben werden (www.mortality.org):

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} -0.03917 \\ 0.0001478 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{C}\mathbf{C}^\top} = \begin{pmatrix} 0.002924269 & -0.00004349 \\ -0.00004349 & 0.000000690 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(2004) = \begin{pmatrix} -10.84976 \\ 0.105443 \end{pmatrix}.$$

Diese Daten rechtfertigen aufgrund ihrer höheren Varianzen und der Korrelation von -0.96818 eher eine stochastische Modellierung mittels zweier Faktoren wie in Cairns, Blake und Dowd (2005) beschrieben. Dies gilt auch für die von Cairns et al. verwendeten Daten des UK Office for National Statistics. Für die vom statistischen Bundesamt veröffentlichten Daten erscheint allerdings eher die Verwendung nur eines (oder sogar keines!) stochastischen Faktors angebracht. Da die Daten der Human Mortality Database aber keinen offiziellen Charakter besitzen, werden wir ab jetzt bei deutschen Daten immer die des statistischen Bundesamtes verwenden.

Beispiel 2: Zeitabhängiges Gompertz-Modell (Cairns et al. Version des Milevsky und Promislow (2001) Modells)

Cairns, Blake und Dowd (2005) schlagen die folgende Variante des ursprünglich von Milevski und Promislow gewählten stochastischen Gompertz-Modells für die Entwicklung der Mortalitätsraten im Zeitablauf vor²

$$\mu_x^{(G)}(t) = \alpha e^{\beta x + \sigma Y(t)}, \quad \alpha, \beta, \sigma > 0, \quad (3.13)$$

wobei $Y(t)$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit

$$dY(t) = -\nu Y(t) dt + dW(t), \quad \nu \geq 0, \quad Y(0) = 0 \quad (3.14)$$

ist. Man kann diese Modellierung auch als ein Gompertz-Modell mit zeitabhängigem, zufälligem $\alpha(t)$ auffassen, wobei

$$\alpha(t) = \alpha e^{Y(t)} \quad (3.15)$$

gilt, d.h. lediglich die allgemeine Sterblichkeit ändert sich im Zeitablauf, während der Teil des Gompertz-Gesetzes, der vom Alter des Individuums abhängt, in der

²In ihrer Originalarbeit verwenden Milevski und Promislow das obige Modell für die „momentane“ Mortalitätsrate $h(t)$, die bei ihnen „hazard rate“ genannt wird und die gemäß

$$p_t(T) = e^{-\int_t^T \mu_s ds} = E \left[e^{-\int_t^T h_s ds} \right]$$

definiert ist mit

$$\begin{aligned} dh(t) &= \alpha e^{\beta t + \sigma Y(t)}, \quad \alpha, \beta, \sigma > 0 \\ dY(t) &= -\nu Y(t) dt + dW(t), \quad Y(0) = 0, \quad \nu \geq 0. \end{aligned}$$

Beachte, dass die „hazard rate“ und somit auch die Mortalitätsrate nur von der Zeit nicht (!) aber vom Kohortenalter abhängt.

(Kalender-)Zeit konstant bleibt. Wir werden auch dieses Modell an die deutschen Daten anpassen. Um die realisierten Werte der Intensitäten $\mu_x^{(G)}(t)$ annähernd zu bestimmen, verwenden wir die Beziehung

$$p(t, x) := p(t+1, t, t+1, x) = \exp\left(-\int_t^{t+1} \mu_{x+s}^{(G)}(s) ds\right) \quad (3.16)$$

aus der für ganzzahlige, vergangene Zeitpunkte t

$$\frac{d}{dt} \ln(p(t, x)) = \mu_{x+t}^{(G)}(t) - \mu_{x+t+1}^{(G)}(t+1) \quad (3.17)$$

folgt. Während man die linke Seite von Gleichung (3.17) durch eine geeignete Differenz (wie z.B. $\ln(p(t, x)) - \ln(p(t-1, x))$) approximieren kann, stellt sich für die rechte Seite die Frage nach geeigneten Startwerten $\mu_x^{(G)}(t)$. Hierzu schlagen wir vor, uns vorliegende „frühe“ realisierte Überlebenswahrscheinlichkeiten zu verwenden, um die (zeitlich konstanten) Intensitäten $\mu_x^{(G)}$ eines klassischen Gompertz-Modells anzupassen. Diese können dann als Startwerte $\mu_x^{(G)}(0)$ für Relation (3.17) dienen, so dass sich aus ihnen und den vorliegenden realisierten Überlebenswahrscheinlichkeiten dann die restlichen realisierten Mortalitätsraten $\mu_x^{(G)}(t)$ (annähernd) bestimmen lassen.

Nehmen wir also für das erste Jahr unserer Betrachtungen

$$p(t, x) = p_x = \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_s^{(G)} ds\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} \left(e^{\beta(x+1)} - e^{\beta x}\right)\right) \quad (3.18)$$

an, so erhalten wir mittels nicht-linearer Minimierung die Schätzer $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ und somit

$$\mu_x^{(G)}(0) = \hat{\alpha} e^{\hat{\beta} x}. \quad (3.19)$$

Die Ornstein-Uhlenbeck-Parameter ν, σ können nun gemäß der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden, in dem wir beachten, dass der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $Y(t)$ eine normal verteilte Übergangsdichte besitzt, genauer:

$$\sigma(Y(t+1) - Y(t)) \sim N\left(\sigma Y(t) e^{-\nu}, \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\nu}}{2\nu}\right). \quad (3.20)$$

Man erhält dann zu den Beobachtungen $\ln\left(\frac{\mu_x^{(G)}(t_i+1)}{\mu_x^{(G)}(t_i)}\right)$, $i = 1, \dots, n$ die Log-Likelihood-Funktion (vgl. Ait-Sahalia (2002)):

$$l_n(\nu, \sigma) = -n \left(\ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(\sigma) + \ln\left(\sqrt{\frac{1 - e^{-2\nu}}{2\nu}}\right) \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln\left(\frac{\mu_x^{(G)}(t_i+1)}{\mu_x^{(G)}(0)}\right) - \ln\left(\frac{\mu_x^{(G)}(t_i)}{\mu_x^{(G)}(0)}\right) e^{-\nu} \right)^2}{2\sigma^2 \frac{1 - e^{-2\nu}}{2\nu}}. \quad (3.21)$$

(Numerisches) Maximieren der Log-Likelihood-Funktion ergibt dann die gewünschten Schätzer für die Ornstein-Uhlenbeck-Parameter ν, σ . Angewendet auf die betrachteten deutschen Daten liefert dies die folgenden Resultate (beachte, dass wir aufgrund der uns nur für die Jahre 1993-2004 vorliegenden Daten 1993 als Startjahr und die deutschen Männer im Alter 60 – 89 als Referenzpopulation gewählt haben): Für die Kalibrierung von $\mu_x^{(G)}(0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0.00005759 \\ \hat{\beta} &= 0.09263573\end{aligned}$$

was wir in der Maximum-Likelihood Methode verwenden, um

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= 0.027505 \\ \hat{\nu} &= 0\end{aligned}$$

zu bekommen.

Beispiel 3: Eine alternative stochastische Gompertz-Variante

Wenn wir zunächst annehmen, dass für die obigen deutschen Daten ein Standard-Gompertz-Modell der Form

$$\mu_x = \alpha e^{\beta x}, \alpha, \beta > 0$$

gilt und danach aus den realisierten Überlebenswahrscheinlichkeiten $p(t, x)$ die Parameter α und β für jedes Jahr separat mittels gewichteter Kleinste-Quadrate-Methode schätzen (siehe Yue (1991)) und als Funktion der Zeit plotten, so erhalten wir Abbildung 1. Man sieht leicht, dass beide Parameter eine starke Zeitabhängigkeit aufweisen, was als Ausdruck der verbesserten Langlebigkeit mit der Zeit angesehen werden kann. Hierbei ist der Parameter α für die allgemeine (altersunabhängige) Verbesserung zuständig, während β die Verbesserung zu verschiedenen Altern beschreibt. Deshalb sollte ein Modell vom Gompertz-Typ, das Langlebigkeitseffekte beschreiben soll, diese beiden beobachteten Tendenzen der Parameter beschreiben. Ein Modell für $\alpha(t)$ muss wegen der Gompertzannahmen nicht-negativ sein und mit der Zeit fallen, um die sich (mit der Kalenderzeit) verbessernde Mortalität zu beschreiben. Da die Varianz dieses Prozesses sehr klein ist ($1.746e - 12$), wählen wir ein deterministisches Modell für die zeitliche Entwicklung:

$$\begin{aligned}d\alpha(t) &= -\kappa\alpha(t)dt \\ \alpha(0) &= \alpha_0.\end{aligned}$$

Unser ermitteltes $\hat{\alpha}(2004) = 0.000028343 > 0$ ist wie gewünscht positiv. Kalibrieren des Parameters κ mittels der geschätzten Zeitreihe $\hat{\alpha}(1993), \dots, \hat{\alpha}(2004)$ ergibt $\hat{\kappa} = 0.0644 > 0$.

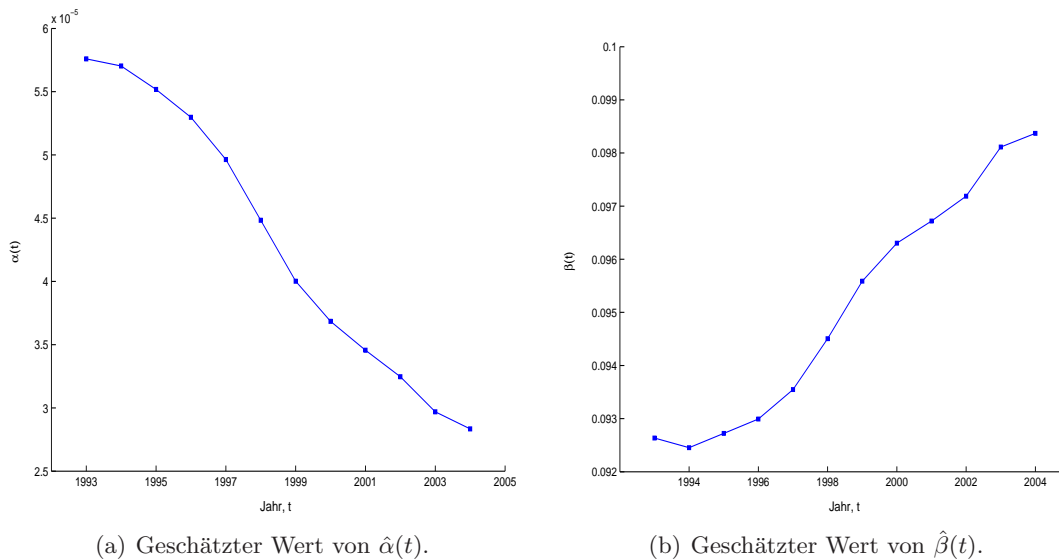


Abbildung 1: Daten des statistischen Bundesamtes (SBA) für deutsche Männer (im Alter von 60-89) aus 1993-2002.

Gleichzeitig haben wir auch $\hat{\beta}(1993), \dots, \hat{\beta}(2004)$ geschätzt und unter der Annahme, dass β sich aus einem messbaren stochastischen Prozess der Form

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \mu dt + \sigma dW(t) \\ \beta(0) &= \beta_0 \end{aligned}$$

ergibt, lassen sich Schätzer für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 bestimmen:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{11} \sum_{i=1993}^{2003} (\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i)) = 0.000521236 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{10} \sum_{i=1993}^{2003} (\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i) - \hat{\mu})^2 = 0.000000141394. \end{aligned}$$

Beachte, dass die größere Varianz als bei der Betrachtung von $\hat{\alpha}$ die Modellierung des β -Parameters als stochastischen Prozess motiviert. Die positive Wahrscheinlichkeit, dass der β -Prozess negativ werden kann, kann aufgrund des positiven Mittelwerts bei positivem Startwert (für den Start der Simulation in 2004 verwenden wir $\beta(0) = \hat{\beta}(2004) = 0.098369335$) und der geringen Varianz vernachlässigt werden.

Wir haben somit ein neues Modell, das „Stochastische Gompertzmodell“ zur Modellierung der Mortalitätsraten als

$$\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t)e^{\beta(t)x}$$

für eine deterministische Funktion der Zeit

$$\begin{aligned}d\alpha(t) &= -\kappa\alpha(t)dt \\ \alpha(0) &= \alpha_0\end{aligned}$$

und einen messbaren stochastischen Prozess $\beta(t)$ mit der Dynamik

$$\begin{aligned}d\beta(t) &= \mu dt + \sigma dW(t), \quad \sigma > 0 \\ \beta(0) &= \beta_0\end{aligned}$$

eingeführt. Seine Anwendung zur Bewertung des Langlebigkeitsbonds wird im nächsten Abschnitt demonstriert.

Beispiel 4: Mortalität und Zinsratenmodellierung

Anhand der Formeln (2.5) und (3.1) wäre es auch naheliegend, für die zeitliche Entwicklung einer stochastischen Mortalitätsrate auf aus der Zinsratenmodellierung bekannte Prozesse zurück zu greifen, sofern Modelle verwendet werden, die zu einer strikt positiven Zinsrate führen. Allerdings ist hier nun zu beachten, dass die Mean-Reversion-Eigenschaft, die bei der Zinsratenmodellierung als besonders wünschenswert gilt, für die Modellierung von Mortalitätsraten eher als unsinnig anzusehen ist. Deshalb fallen in natürlicher Weise das Vasicek-Modell, das CIR-Modell sowie ihre Hull-White-Varianten aus der Kandidatenliste. Um eine tendenziell mit dem Alter steigende Sterblichkeitsrate zu modellieren, würden sich am ehesten log-normale Zinsratenmodelle wie das Dothan-Modell oder aber das Black-Karasinski-Modell eignen. Wir wollen hier kein weiteres Modell explizit einführen, aber bemerken, dass der Mortalitätsratenprozess im Gompertz-Modell aus Beispiel 2 sehr ähnlich zur Short-Rate im Black-Derman-Toy-Modell ist (vgl. Milevsky und Promislow (2001)) und dass das im ersten Schritt von Cairns et al. verwendete Modell als eine zeitdiskrete Variante des Dothan-Modells angesehen werden kann. In allen obigen Fällen ist man nun in der Lage, durch Monte Carlo Simulation der zukünftigen Werte der dem Modell zugrunde liegenden und an die Daten angepassten stochastischen Prozesse Schätzer für die gesuchten Werte von $S(i)$ zu bestimmen, was dann im nächsten Abschnitt auch zur Bewertung von Langlebigkeitsbonds verwendet werden kann.

4 Bewertungsprinzipien für Langlebigkeitsbonds

Bisher wurde das Problem der Bewertung des Langlebigkeitsbonds eher unterschwellig betrachtet. Lediglich die Annahme (2.2) der Unabhängigkeit zwischen dem Zins und dem Mortalitätsrisiko führte dazu, dass wir die Bewertung der beiden Risiken multiplikativ von einander trennen konnten. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass das Zinsrisiko handelbar ist (genauer: lineare Zinsprodukte wie Zerobonds und ähnliches sind handelbar) und somit unter einem geeigneten Martingalmaß Q bewertet werden muss (d.h. insbesondere, dass der mit dem Geldmarktkonto abgezinst

Preisprozess des Langlebigkeitsbonds ein Martingal unter Q sein muss). Nimmt man nun an, dass zum einen für die Marktpreise der Zerobonds

$$P(t, T) = E_Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| f_t \right)$$

gilt (also der Zinsmarkt tatsächlich Q (bzw. ein auf dem Zinsmarkt zu Q identisches Maß) zur Bewertung verwendet), so ergibt sich ein möglicher Preis für den Langlebigkeitsbonds als

$$\begin{aligned} P^{(L)}(t) &= E_Q \left(\sum_{i=1}^N \exp \left(- \int_t^i r(s) ds \right) S(i) 1_{\{t \leq i\}} \middle| f_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^N P(t, i) E_Q(S(i) | f_t) 1_{\{t \leq i\}}, \end{aligned}$$

wenn wir weiterhin davon ausgehen, dass Zins- und Mortalitätsrisiko unter dem Bewertungsmaß Q unabhängig sind. Damit sind die jeweils mit dem Geldmarktkonto (bis zu den jeweiligen Zahlungszeitpunkten) entsprechend abgezinsten Preisprozesse dann Martingale bezüglich Q .

Allerdings ist für das Mortalitätsrisiko die Annahme eines finanzmathematischen Bewertungsprinzips (wie Arbitrageprinzip oder strenges Duplikationsprinzip) wegen der Nicht-Handelbarkeit des Mortalitätsrisikos zum einen nicht zwingend und zum anderen auch nicht unbedingt hilfreich. Hierfür bieten sich die klassischen versicherungsmathematischen Prinzipien wie z.B. das Erwartungswert- oder das Varianzprinzip an. Ein mögliches Bewertungskonzept, bei dem sowohl dem Arbitrageprinzip auf der Seite des Zinsmarktes Rechnung getragen wird als auch eine Sicherheitsmarge im Sinne der Versicherungsmathematik zur Absicherung gegen das (nicht-handelbare) Mortalitätsrisiko berücksichtigt wird, ist in dem folgenden Vorschlag zu sehen.

Dafür gehen wir davon aus, dass sich der Preis eines Zerobonds auf dem Zinsmarkt wie oben als bedingter Erwartungswert unter einem Martingalmaß Q ergibt, von dem aber lediglich die Zinskomponente eindeutig durch die obige Gleichung für den Preis des Langlebigkeitsbonds bestimmt ist. Das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß, das den zeitlichen Verlauf der Mortalitätsentwicklung beschreibt, ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P , das zum wie im dritten Abschnitt an die Mortalitätsdaten angepassten stochastischen Prozess gehört. Dieses Maß ist bei gegebenem Mortalitätsmodell (egal, ob klassisch, zeitabhängig-stochastisch oder bei Verwendung einer Sterbetafel) objektiv nachprüfbar und auch dann mit der oben über die

risiko-neutrale Bewertung gewonnenen Preisformel kompatibel, wenn

$$\begin{aligned} P^{(L)}(t) &= E_Q \left(\sum_{i=1}^N \exp \left(- \int_t^i r(s) ds \right) S(i) 1_{\{t \leq i\}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N P(t, i) E_P(S(i) | f_t) 1_{\{t \leq i\}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

gilt, also P die „Mortalitätskomponente von Q “ darstellt.

Bei tatsächlich am Markt gehandelten Langlebigkeitsbonds wird man allerdings feststellen, dass ihr Preis höher als der obige, nach finanzmathematischen Prinzipien gewonnene Preis ist. Dies lässt sich auf verschiedene Arten erklären:

1. Anwendung des Erwartungswertprinzips

Gilt zwischen dem Marktpreis des Langlebigkeitsbonds $P_M^{(L)}(0)$ und $P^{(L)}(0)$ die Beziehung

$$P_M^{(L)}(0) = (1 + \delta) P^{(L)}(0)$$

für ein festes $\delta > 0$, so kann der gegenüber dem „fairen Preis“ $P^{(L)}(0)$ höhere Marktpreis $P_M^{(L)}(0)$ als durch die Anwendung des Erwartungswertprinzips mit Parameter δ durch den Anbieter des Langlebigkeitsbonds entstanden erklärt werden. Natürlich lässt sich der Unterschied zwischen Markt- und fairem Preis auch durch die Anwendung anderer aktuarieller Bewertungsprinzipien erklären. Allerdings erfordert dann der komplexere Zusammenhang über höhere Momente oder über eine Nutzenfunktion auch komplexere Berechnungen, um die allgemeine parametrisierte Form des aktuariellen Preises des durch die Mortalität beeinflussten Teils der Zahlungen des Langlebigkeitsbonds zu bestimmen.

2. Risiko-neutrale Bewertung und Maßwechsel

Da eine Preisdifferenz zwischen dem fairen Wert und dem Marktpreis vorliegt, muss der Marktpreis bei Beibehaltung des Ansatzes der risiko-neutralen Bewertung mit Hilfe eines Martingalmaßes durch die Verwendung eines solchen Maßes $Q(\lambda)$ entstanden sein, bei dem die Mortalitätskomponente durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_λ an Stelle von P beschrieben wird. Hierbei übernimmt λ die Rolle des Marktpreises des Risikos. So entspricht im Cairns, Blake und Dowd Modell die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_λ einer Ersetzung des Driftvektors durch $\nu - C\lambda$. Man kann nun mit numerischen Methoden versuchen, einen Vektor λ zu bestimmen, so dass

$$P_M^{(L)}(0) = P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0) = \sum_{i=1}^N P(0, i) E_{P_\lambda}(S(i)) \quad (4.2)$$

gilt (ein solcher Vektor muss nicht notwendigerweise existieren!). Wir wollen die zweite Methode wieder mit Hilfe der deutschen Daten demonstrieren.

Hierzu nehmen wir wieder die Referenzpopulation der deutschen Männer vom Alter 60-89 und verwenden die bereits geschätzten Parameter $\hat{\nu}, \hat{C}$ and $\hat{A}(2004)$. Setzen wir $N = 25$, das Kohortenstartalter auf 65, $\delta = 0.0183$ und verwenden eine Zinsrate von 4%, so liefert numerisches Lösen von (4.2) die Lösungsmenge

$$I := \left\{ (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \quad s.t. \quad \left(P_M^{(L)}(0) - P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0) \right)^2 \leq \varepsilon \right\}$$

für einen kleinen Toleranzparameter ε . Die Betrachtung des quadratischen Fehlers als Funktion von λ_1 und λ_2 in Abbildung 2 zeigt, dass die Lösungsmenge des Minimierungsproblems gegen eine (fast) gerade Linie konvergiert.

Die Wahl eines Punktes auf der Lösungslinie³ verändert die Krümmung des Überlebensindex $S(t)$ (siehe Abbildung 3) und kann als die Wahl eines Maßes interpretiert werden, dass mehr Gewicht auf frühe oder auf späte Kuponzahlungen legt. Die Motivation für eine solche Wahl kann z.B. in der jeweils vorhandenen Zinsstruktur liegen. Man kann umgekehrt natürlich die Wahl eines Punktes auf der Lösungslinie auch nachträglich davon abhängig machen, dass man konservativ bewerten will, d.h. dass man ein Bewertungsmaß wählt, unter dem der Überlebensindex immer oberhalb dem liegt, den man mit dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt hat. Dies würde in unserem Beispiel die Wahl von $Q(0, -6.91)$ ausschließen. Allerdings ist eine solche Vorgehensweise nur pragmatisch, nicht aber theoretisch begründbar.

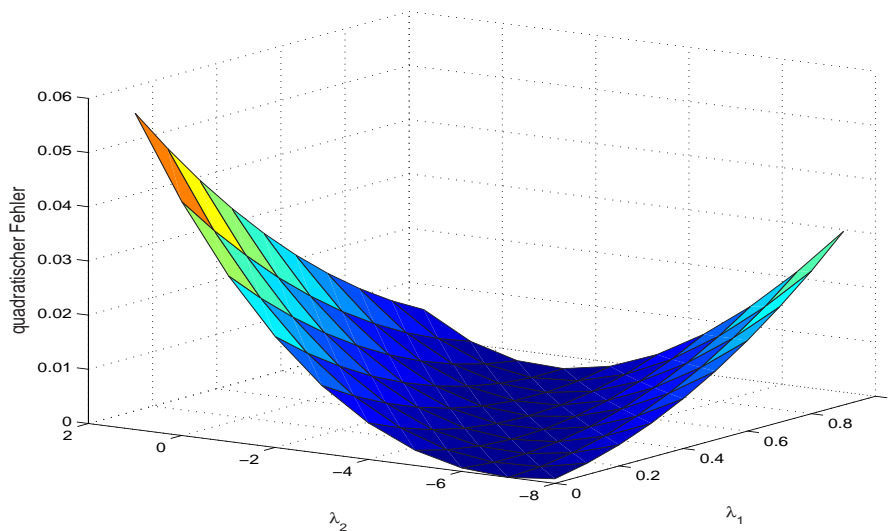


Abbildung 2: Fläche der quadrierten Differenzen zwischen $P_M^{(L)}(0)$ und $P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0)$.

Die Anwendung der selben Methode für unser stochastisches Gompertz-Modell mit Drift des $\beta(\cdot)$ -Prozesses der Form $\mu - \sigma\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und numerisches Lösen von

³Cairns et al. betrachten nur Maße der Form $Q_{(\lambda_1, 0)}$, $Q_{(0, \lambda_2)}$ und $Q_{(\lambda, \lambda)}$.

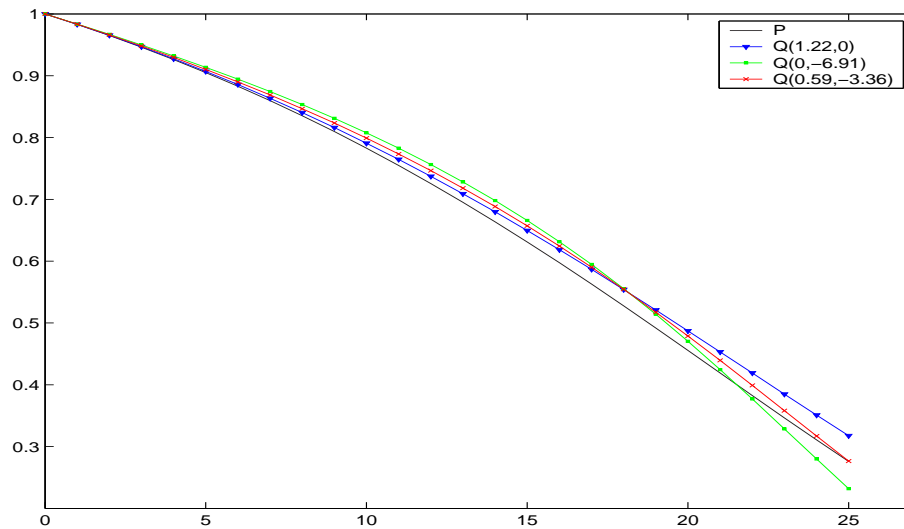


Abbildung 3: Schätzungen für $E[S(t)]$ für deutsche Männer im Alter von 60-89 im Cairns et al. Modell für die Maße $P, Q(1.22, 0), Q(0, -6.91), Q(0.59, -3.36)$. Daten aus 1993-2004. 5000 MC-Simulationen.

(4.2) liefert $\lambda = 0.20$. Die Resultate werden in Abbildung 4 wiedergegeben. Beachte, dass in unserem Modell lediglich ein stochastischer Faktor vorhanden ist und wir somit ein eindeutiges Maß $Q(\lambda)$ durch Lösen von (4.2) erhalten. Wie der Vergleich zeigt, erhält man im vorliegenden Fall eine konservative Bewertung.

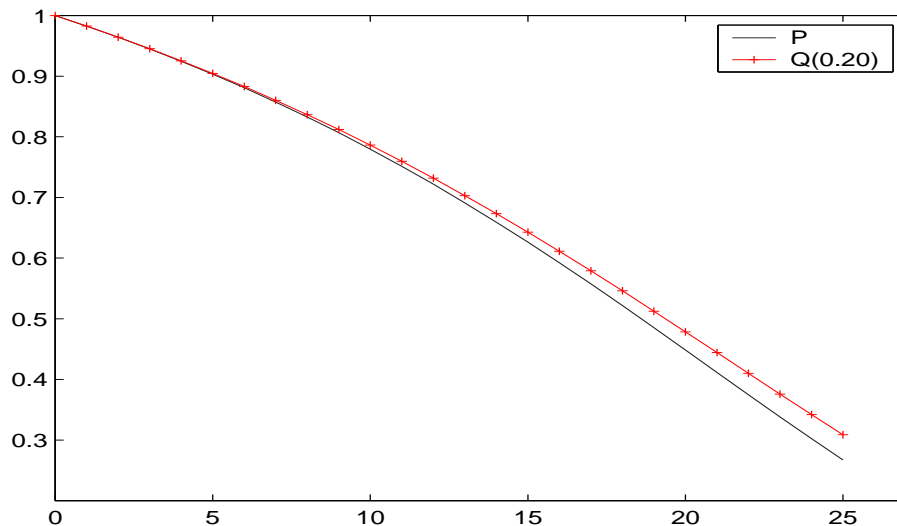


Abbildung 4: Schätzungen für $E[S(t)]$ für deutsche Männer im Alter von 60-89 im stochastischen Gompertz-Modell für die Maße P und $Q(0.20)$. Daten aus 1993-2004. 5000 MC-Simulationen.

Vergleich der verschiedenen Modelle:

Wir wollen nun anhand der von uns geschätzten Parameter auf Basis der Referenzpopulation deutscher Männer im Alter von 60-89 aus den Jahren 1993-2004 einen Vergleich zwischen den oben vorgestellten drei stochastischen Modellen durchführen. Zu diesem Zweck setzen wir das Kohortenalter auf 65 und für $N = 40$ Jahre simulieren wir mit Hilfe der Monte Carlo Methode den Wert von $E_P[S(i) | f_0]$ für $i = 1, \dots, 40$. Abbildung 5 beinhaltet die zugehörigen Resultate. Man sieht, dass die Cairns et al.-Kurve sehr nah an der zum stochastischen Gompertz-Modell aus Beispiel 3 liegt. Auch aufgrund dieses Ergebnisses könnte man argumentieren, dass lediglich ein stochastischer Faktor vollkommen ausreicht, um die zeitliche Entwicklung der Mortalitätsrate gut zu beschreiben (man erinnere sich auch an die sehr hohe Korrelation zwischen den stochastischen Faktoren im Cairns Fall). Weiter ist sehr auffällig, dass die Milevski und Promislow-Kurve sehr hohe Mortalitätsraten vorher sagt (und somit zu einer niedrigeren Survivor-Kurve führt), ein Effekt, der dadurch begründet werden kann, dass versucht wird, einen fast deterministischen Effekt im Zeitablauf mit stochastischen Parametern zu modellieren, die hauptsächlich für die Volatilität und nicht die Drift zuständig sind. Es liegt hier also ein modellinherenter Fehler vor.

Da wir natürlich auch an der Bewertung des Langlebigkeitsbonds interessiert sind, vergleichen wir auch die sich aus den drei kalibrierten Modellen ergebenden Bondpreise. Hierzu wählen wir die Bondspezifikationen wie im EIB/BNP-Langlebigkeitsbond, d.h. wir wählen eine Laufzeit von 25 Jahren, ein Kohortenalter von 65 in 2004 und setzen der Einfachheit halber die Zinsrate auf 4%. Hiermit führen wir 5000 MC Simulationen durch. Mittels (4.1) erhalten wir:

Modellart:	$P^L(0)$
Cairns et al.	11.388
Milevski und Promislow	10.328
stochastischer Gompertz	11.338

Wie erwartet (und aus Abbildung 5 bereits abzulesen) liegen die Preise, die zum Cairns et al.-Modell und zum stochastischen Gompertz-Modell aus Beispiel 3 gehören nah beieinander. Der im Milevsky und Promislow-Modell bestimmte Preis liegt deutlich unter den anderen beiden und ist das Resultat einer signifikanten Überschätzung der Mortalitätsraten. Dies ist allerdings aufgrund der nur bedingten Anwendbarkeit des Milevsky und Promislow-Modells (siehe die obige Bemerkung zum modellinherenten Fehler) nicht verwunderlich.

5 Mortalitäts- versus Langlebigkeitsbonds: Unsystematisches und systematisches Risiko

Wie wir eingangs bereits angedeutet haben, ist Langlebigkeit von Sterblichkeit zu unterscheiden. Betrachtet man das Portfolio von Versicherungsverträgen eines Le-

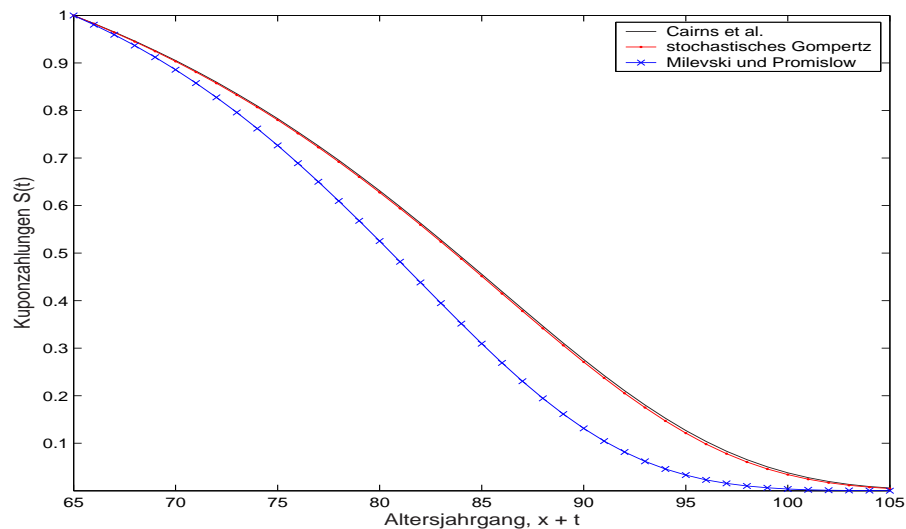


Abbildung 5: Schätzungen von $E_P[S(t)]$ für deutsche Männer mit Hilfe der Modelle von Cairns et al., Milevsky and Promislow und dem stochastischen Gompertz-Modell. Daten aus 1993-2004. 5000 MC Simulationen.

bensversicherers, so ist mit jedem Vertrag die individuelle Sterblichkeit des Versicherten verbunden. Das damit verbundene individuelle Sterbealter fluktuiert aus Sicht des Lebensversicherers um die Lebenserwartung des Versichertenbestandes. Infolge dieses Diversifikationseffekts ist für den Versicherer nur das Langlebkeitsrisiko des Versichertenbestandes relevant. Ist ferner der Versichertenbestand pro Alterskohorte hinreichend gut diversifiziert (z.B. über Bevölkerungs-/Berufsgruppen, Einkommenschichten, etc.), so stimmt (mit zunehmender Bestandsgröße) für diese Alterskohorte die Lebenserwartung mit der der entsprechenden Alterskohorte der Bundesbevölkerung überein. In diesem Fall kann das Langlebkeitsrisiko mittels der in dieser Arbeit dargestellten Langlebkeitsbonds abgesichert werden. In diesem Sinne kann man die Bundesbevölkerung als einen Indikator für das *systematische Langlebkeitsrisiko*, also des Risikos, das unter Berücksichtigung aller möglichen Diversifikationseffekte verbleibt, ansehen.

Im Gegensatz dazu lässt der, in der Literatur diskutierte, Mortalitätsbond (Lin, Cox (2005))⁴ den erwähnten Diversifikationseffekt unberücksichtigt und gibt das spezielle Mortalitätsrisiko des Vertragsportfolios direkt an den Investor weiter. Wenn gleich das aus Sicht des Versicherers eine optimale Lösung darstellt, bietet es für den Investor ein unklares Investment. Um das Risiko eines Mortalitätsbonds beurteilen zu können, muss der Investor eine Einschätzung der Lebenserwartung des Versichertenbestandes haben. Letzterer wird aber für den Investor (u.a. aus Datenschutzgründen) intransparent bleiben, so dass das Risiko nicht vernünftig beurteilt werden kann. Dies hat zur Folge, dass die Investitionsbereitschaft und infolge dessen

⁴Darunter fällt auch der von SwissRe emittierte mortalitätsindizierte Katastrophenbond.

die Liquidität von Mortalitätsbonds eher gering bleiben wird.

Genau das vermeiden Langlebigkeitsbonds. Zwar mag die Annahme, dass der Versichertenbestand hinreichend gut diversifiziert ist, unrealistisch erscheinen, so ist sie doch – nach Ansicht der Autoren – eine vernünftige Approximation. Neben diesem vermeintlichen Nachteil bieten sich aber eine Reihe von Vorteilen. Der Bezug auf die Bundesbevölkerung erlaubt eine nicht durch Bestandsbesonderheiten des Versicherers verfälschte, objektive Bestimmung der Langlebigkeit. Für den Investor bedeutet das große Transparenz hinsichtlich der Höhe der Kuponzahlungen, denn die dafür benötigten Daten sind öffentlich zugänglich (z.B. Statistisches Bundesamt). Ferner kann sich der Investor eine Meinung über den Sterblichkeitstrend bilden, der das Rendite-/Risiko-Profil des Langlebigkeitsbonds bestimmt. Letztendlich muss der Versicherer selbst entscheiden, ob die Unabhängigkeit seines individuellen Langlebigkeitsrisikos von dem durch den Bond abgedeckten für ihn akzeptabel ist, aus Sicht des Investors ist es ein die Investitionsbereitschaft fördernder Faktor. Tatsächlich kann unserer Meinung nach nur ein liquider Finanzmarkt für den Handel des systematischen Langlebigkeitsrisikos und nicht für den des unsystematischen Mortalitätsrisikos eines bestimmten Versicherungsbestands entstehen. Nur die erste Risikoklasse bietet dem Markt genügend Transparenz, damit er sie einschätzen und das zugehörige Risiko handeln kann.

Darüber hinaus kann der Langlebigkeitsbond gewinnbringend bei der Optimierung des Anlageportfolios eingesetzt werden. Betrachtet man Langlebigkeitsrisiko als eigene Assetklasse, so kann diese als unkorreliert zu allen anderen angenommen werden (s.a. Annahme (2.2)). Folglich sind für Investoren, die bestrebt sind, ihr Anlageportfolio gut zu diversifizieren, – unabhängig davon, ob sie eine Meinung zu Sterblichkeitstrends haben oder nicht – Langlebigkeitsbonds eine interessante Assetklasse. Da außerdem das Rendite-/Risiko-Profil explizit bestimmt werden kann (z.B. mit den in Abschnitt 4 dargestellten Überlegungen), lassen sich Langlebigkeitsbonds leicht in praktische Optimierungsprozesse à la Markowitz integrieren. Für potentielle Kapitalanleger wäre somit ein liquider Markt in Langlebigkeitsbonds wünschenswert.

Aber auch für den Lebensversicherer ergäben sich Vorteile. Die heikle Aufgabe der Einschätzung der Langlebigkeit würde nämlich der (Finanz-)Markt übernehmen. Über den Marktpreis bestimmt sich vermittels Formel (4.1) die implizite Langlebigkeit. Daran können sich die Versicherer dann bei der Tarifierung orientieren. Diese Einschätzung ist sogar objektiv, setzt man voraus, dass der Markt als Gesamtes über mehr Informationen verfügt als der einzelne Versicherer.

Schließlich stellen die beiden in dieser Arbeit behandelten Ansätze von Cairns et al. (2005) (siehe Beispiel 1) und unser neu entwickelter stochastischer Gompertz-Ansatz (siehe Beispiel 3) zur Modellierung von Langlebigkeit geeignete Werkzeuge dar, mit denen sowohl Versicherer als auch Banken auf einfache aber auch realistische und im Bereich der klassischen Lebensversicherung vertraute Art und Weise neue Produkte auf systematisches Langlebigkeitsrisiko bewerten können. Der von uns eingeführte allgemeine Rahmen erlaubt weiterhin die Betrachtung anderer

Modellierungsansätze im Problembereich Langlebigkeit. Natürlich lassen sich die vorgestellten Preismodelle auch ohne großen Aufwand zur Bewertung von Langlebigkeitsswaps oder Mortalitätsoptionen einsetzen.

Literatur

- [1] Benjamin, B. und Pollard, J.H. (1993) *The analysis of mortality and other actuarial statistics*. The Institute of Actuaries, Oxford.
- [2] Cairns, A.J.G., Blake, D. und Dowd, K. (2005) *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty*. Heriot-Watt-University Edinburgh, working paper.
- [3] Blake, D., Cairns, A.J.G. und Dowd, K. (2006) *Living with mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities*. Paper presented to the Faculty of Actuaries, 16 January 2006.
- [4] Cowley, A. und Cummins, J.D. (2005) Securitization of life insurance assets and liabilities. *Journal of Risk and Insurance*, 72: 193-226.
- [5] Dahl, M. (2004) Stochastic mortality in life insurance: Market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35: 113-136.
- [6] Lee, R.D. und Carter, L.R. (1992) Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87: 659-675.
- [7] Lin, Y. und Cox S.H. (2005) Securitization of mortality risks in life annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 72: 227-252.
- [8] Milevsky, M.A. und Promislow S.D. (2001) Mortality derivatives and the option to annuitise. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29: 299-318.
- [9] Olivieri, A. (2001) Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29 (2): 231-245.
- [10] Olivieri, A. und Pitacco E. (2003) Solvency requirements for pension annuities. Erscheint in: *Journal of Pension Economics and Finance*.
- [11] Perks, W. (1932) On some experiments in the graduation of mortality statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 63: 12-57.
- [12] Pitacco, E. (2005) *Survival models in actuarial mathematics: From Halley to longevity risk*. University of Trieste, working paper.
- [13] Yue, J.C. (1991) *Oldest-Old Mortality Rates and the Gompertz Law: A Theoretical and Empirical Study Based on Four Countries*. National Chengchi University, working paper.

Danksagung

Wir bedanken uns bei Dr. Jürgen Amendinger (HypoVereinsbank, Corporate & Markets, München) für vielfältige Diskussionen und Anregungen zum Thema. Die Arbeit von Ralf Korn wurde vom Exzellenzcluster *Dependable adaptive systems and mathematical modeling* des Landes Rheinland-Pfalz unterstützt.

Zusammenfassung

Langlebigkeitsbonds - Bewertung, Modellierung und Aspekte für deutsche Daten

In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeiner Rahmen zur Bewertung von Langlebigkeitsbonds entwickelt. Dies geschieht am Beispiel einer Variante des von EIB/BNP Paribas emittierten Langlebigkeitsbonds, dessen Kuponzahlungen von der *realisierten* Sterblichkeit von Alterskohorten der deutschen Bundesbevölkerung abhängen. Für diesen (deutschen) Langlebigkeitsbond wurden die aus der Literatur bekannten stochastischen Modellierungsansätze von Cairns et al. (2005) und von Milevsky und Promislow (2001) analysiert sowie ein neues Modell entwickelt, das eine stochastische Variante des klassischen Gompertz-Modells darstellt. Der Vergleich der Resultate dieser Modelle zeigt die Praxistauglichkeit unseres neuen Ansatzes sowie des Cairns et al. Modells, während der Milevsky und Promislow Ansatz unrealistische Werte liefert.

Ferner haben wir den Begriff des systematischen Langlebigkeitsrisikos eingeführt. Produkte zur Absicherung von systematischem Langlebigkeitsrisiko werden – nach Meinung der Autoren – die einzigen Produkte sein, für die ein liquider Finanzmarkt entstehen kann. Der vorgestellte Langlebigkeitsbond ist das erste Produkt für den deutschen Markt, das systematisches Langlebigkeitsrisiko absichern kann.

Summary

Longevity Bonds - Pricing, Modeling and Application for German Data

In this paper, we will develop a general framework for the pricing of longevity bonds. This will be demonstrated on the example of a variant of the EIB/BNP Paribas longevity bond with coupon payments depending on the realized mortality of some cohort groups of the German population. In the pricing of the (German) longevity bond we will analyze the stochastic modeling approaches of Cairns, Blake and Dowd (2005) and Milevski and Promislow (2001) and in addition we will develop a new model as a stochastic variant of the classical Gompertz model. Comparison of the results of these models will demonstrate the practical suitability of our new approach as well as of the one by Cairns, Blake and Dowd (2005), whereas it will be shown that the approach of Milevski and Promislow (2001) delivers unrealistic results.

Further, we shall introduce the term systematic longevity risk. In the authors opinion, a liquid financial market can appear only for products hedging the systematic longevity risk. The presented longevity bond is the first product for the German market capable of hedging the systematic longevity risk.