G. Baur
A. Gerber

Blatt 4
10.05.2010

Übungen zu Analysis für Informatiker

(Abgabe: Montag, 17.05.2010, 16.10 Uhr, H22)

10. Zeige mit Hilfe der Definition von Folgenkonvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-7}{2n^2+3} = \frac{3}{2}$$

(4 Punkte)

11. Es sei a der Grenzwert einer Folge (a_n) in $[0,\infty)$. Zeige, dass dann $\sqrt{a}$ der Grenzwert der Folge $\sqrt{a_n}$ ist.

(4 Punkte)

12. Im Folgenden ist jeweils das n-te Glied einer Folge gegeben. Untersuche die Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenfalls den Grenzwert.

(a) $\dfrac{(n-2)^3}{n^4+n^2+8}$ (b) $(-1)^n \dfrac{2+n}{4-n}$ (c) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

(d) $\dfrac{n^5\, 2^n+(-5)^n}{n^2+5^n}$ (e) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^5$ (f) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

(g) $2n \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ (i) $\dfrac{1}{n^2}\cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k}^{n-1}\frac{k^2}{(l+1)(2l+1)}$

(18 Punkte)

13. Beweise oder widerlege (mit einem Gegenbeispiel):

(a) Es gelte $a_n = O(b_n)$ und $b_n = O(c_n)$ für die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) . Dann gilt auch $a_n = O(c_n)$.

(b) Es gelte $a_n = o(b_n)$ und $b_n \sim c_n$ für die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) . Dann gilt auch $a_n \sim c_n$.

(6 Punkte)