Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 5

(Abgabe: Dienstag 17. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 18. Mai vor der ersten Übung.)

”Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.”
- Johann Wolfgang von Goethe, 1749-1832, deutscher Dichter.

Aufgabe 19 *(Ungleichungen und Parameterisierung)* (2+2=4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die verbleibenden Aussagen aus Satz 4, also zeigen Sie für a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers folgende Aussagen:

(x) $a < b,\ c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$.

(xi) $0 < a < b,\ 0 < c \leq d \Rightarrow ac < bd$.

(b) Zeigen Sie, dass für Elemente a, b, c, λ eines angeordneten Körpers gilt

$$a < b < c \qquad \Rightarrow \qquad \exists!\ \lambda \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ und } b = \lambda a + (1 - \lambda)c.$$

Aufgabe 20 *(Maximum, Supremum, Minimum, Infimum)* (4 Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper und $A := \{x \in K : 0 \leq x < 1\}$. Bestimmen Sie (mit ausführlicher Begründung) falls existent

- $\min A$.
- $\inf A$.
- $\max A$.
- $\sup A$.

Aufgabe 21 *(Maximum und Supremum auf mengentheoretischen Operationen)* (1+1+1+1+1+2*=5(+2) Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subset K$. Zeigen Sie

(a) $A \subset B$, $\max A, \max B$ existiert $\Rightarrow \max A \leq \max B$.

(b) $A \subset B$, $\sup A, \sup B$ existiert $\Rightarrow \sup A \leq \sup B$.

(c) $T \in K$, $a \leq T\ \forall a \in A \Rightarrow \sup A$ existiert und es gilt $\sup A \leq T$.

(d) $\max A, \max B$ existiert $\Rightarrow \max(A \cup B)$ existiert und es gilt

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}.$$

(e) $\sup A, \sup B$ existiert $\Rightarrow \sup(A \cup B)$ existiert und es gilt

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

(f) * Gibt es etwas Ähnliches für (e) auch für $A \cap B$? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 22 *(Maximum und Betrag)* (3 Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Aufgabe 23 *(Un-/Gleichungen)* (2+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

(a) $|x + 1| + |x - 1| = 4$.

(b) $|2x + 2| \leq 5 - |x - 1|$.