Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 10

(Abgabe: Dienstag 21. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 22. Juni vor der ersten Übung.)

"The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man."
- David Hilbert, 1862 - 1943, German mathematician.

Aufgabe 45 *(Stetigkeit des Logarithmus)* (2 Punkte)

Sei $x_n, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $x_n, x > 0$ sowie $(x_n) \to x$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann ebenfalls gilt

$$\log(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \log(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $x = 1$.

Aufgabe 46 *(Konvergenz von Reihen I)* (1+1+1+1+1+1+1+1=8 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende unendliche Reihen auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{k!}$ (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2} - 1)^k$

(v) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+2}$ (vi) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}$ (vii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (viii) $\sum_{k=2}^{\infty} (\log k)^{-\log(k)}$.

Aufgabe 47 *(Konvergenz von Infima)* (2 Punkte)

Gegeben sei eine beschränkte, reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b_n := \inf\{a_m : m \geq n\}$. Zeigen Sie

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 48 *(Konvergenz von Reihen II)* (2+2+2=6 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die nachstehende unendliche Reihen konvergieren

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+z^k}$.

Aufgabe 49 *(Abhängigkeit eines Parameters)* (2+4*=2(+4) Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.

(b) * Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende unendliche Reihe konvergiert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \log(k) \cdot (\log(\log k))^{\alpha}}.$$