Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Übungsblatt 2

(Abgabe: Donnerstag, 3. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 5 *(DGL mit AWP)* (4 Punkte)

Löse das folgende Anfangswertproblem. Gib ein möglichst großes Lösungsintervall an.

$$\dot{x} = tx^2 - \frac{x}{t} - \frac{2}{t^3} \quad , \quad x(2) = 1.$$

Hinweis: $x_0(t) = \frac{c}{t^2}$ mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung.

Aufgabe 6 *(Differenzialgleichung mit AWP)* (3+3=6 Punkte)

Löse die folgenden Anfangswertprobleme. Gib ein möglichst großes Lösungsintervall an.

(i) $t(t+1)\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \quad , \quad x(1) = 0$

(ii) $t\dot{x} = x \log \frac{x}{t} \quad , \quad x(-1) = -1$

Aufgabe 7 *(verallgemeinrte homogene Differenzialgleichung)* (4+4=8 Punkte)

Für $f \in C(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Zahlen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $a\beta - \alpha b \neq 0$ heißt

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right) \quad (1)$$

mit $\alpha t + \beta x + \gamma \neq 0$, $(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}) \in J$ eine verallgemeinerte homogene DGL.

(i) Zeige: Es gibt ein $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $at_0 + bx_0 + c = \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma = 0$ und (x, I) welches genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn (z, I) Lösung der homogenen DGL $\dot{z} = f(\frac{a+b\frac{z}{t}}{\alpha+\beta\frac{z}{t}})$ ist, wobei $z(t) := x(t + t_0) - x_0$.

(ii) Löse als Beispiel die DGL

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{x+3}{t-1}} + \frac{x+3}{t-1}$$

Aufgabe 8 (3+3=6 Punkte)

(i) Es seien $f, g \in C_1(M)$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Welcher Bedingung müssen f und g genügen, dass die DGL $f(t,x) + g(t,x)\dot{x} = 0$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(t^2 + x^2)$ besitzt?

(ii) Löse das Anfangswertproblem

$$x\dot{x} + t + (t^2 + x^2)\cos(t) = 0 \quad , \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1$$