Vermischte Aufgaben zu
"Mathematische Grundlagen der Ökonomie" 2

Aufgabe 1:

Bilden die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme jeweils einen Unterraum des $I\!R^3$? Begründen Sie.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2:

Für welche $\alpha \in I\!R$ sind folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & b_4 \end{array}$$

, wenn der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$\text{(i)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem einmal mit der Cramerschen Regel und einmal unter Benutzung der Matrix-Inversen:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 5:

Ermitteln Sie Art und Lage der Extremstellen der Funktion

$$f(x,y,z) = 6z + 2xz - x^2 - y^2 - 4z^2.$$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die $m-$te Potenz der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie den Rand der folgenden Matrizen (in Abhängigkeit der Parameter α bzw. β):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 3 \\ 3 & 1 & \beta \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 48 & 46 & 0 & 42 \\ 27 & 28 & 27 & 1 & 11 \\ 27 & 25 & 23 & 1 & 11 \\ 0 & 17 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Genau dann gilt für zwei quadratische Matrizen A und B die Binomische Formel $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, wenn $AB = BA$ gilt.

(ii) Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z} \in I\!R^n$ linear abhängig, so lässt sich einer der drei Vektoren als Linearkombination der anderen beiden schreiben.

(iii) Ist A eine invertierbare quadratische Matrix, so sind alle Eigenwerte von A ungleich 0, und ist λ ein solcher Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(iv) Ist A eine diagonalisierbare quadratische Matrix, so konvergiert A^m für $m \to \infty$ gegen die Nullmatrix genau dann, wenn alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Aufgabe 11:

Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an:

$$3x^4 - 6x^6 - \sin x\ ; \quad \frac{\sin x + x\cos x}{x \sin x}\ ; \quad \frac{1}{x}\ln x\ ; \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ; \quad e^{-x}\sin 2x\ ;$$

$$x \cdot \arctan x\ ; \quad \frac{x+1}{x(x-1)}\ ; \quad \frac{3x^2-2x+1}{x^2(x-1)}\ ; \quad x^3 \cdot e^{-x} \quad \frac{x^3+x^2+5x+4}{x(x^2+4)}$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man den Graphen von $f(x)$ um die $x-$Achse rotieren lässt.

Aufgabe 13:

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $y = \sin x$ und $y = \sin 2x$ im Bereich $[0, \pi]$

(Hinweis: Es gilt die trigonometrische Identität $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.)

Aufgabe 14:

Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert:

$$\int_0^\infty x^2\, e^{-2x}\, dx; \quad \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x-1}\, dx\ ; \quad \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx\ ; \quad \int_0^1 \ln x\, dx$$

Aufgabe 15:

Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren:

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx\ ; \quad \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx\ ; \quad \int_0^1 \frac{e^x-1}{x^2}\, dx\ ; \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\, dx\ ; \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie folgende Flächenintegrale $\displaystyle\iint_M f(x,y)\, d(x,y)$:

(i) $M = [0,2] \times [1,3]; \quad f(x,y) = xy^2$

(ii) $M = \{(x,y)^T \in I\!R^2 :\ 0 \le x \le 1;\ x \le y \le x^2 + 1\}; \quad f(x,y) = xy$

(iii) $M = \{(x,y)^T \in I\!R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \}; \quad f(x,y) = \sin\left(\pi(x^2 + y^2)\right)$