Vermischte Aufgaben zu
"Mathematische Grundlagen der Ökonomie"

Aufgabe 1:

Bilden die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme jeweils einen Unterraum des $I\!R^3$? Begründen Sie.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

(i) ist schreibbar als $A\vec{x} = \vec{0}$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Solche Mengen M sind immer Unterräume des $I\!R^3$, denn:

$\vec{x}, \vec{y} \in M \Rightarrow A\vec{x} = A\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in M$.
Analog folgt: $\lambda\vec{x} \in M \ \ \forall\, \vec{x} \in M, \ \lambda \in I\!R$.

Die Lösungsmenge von (ii) stellt keinen Unterraum dar, da sie nicht einmal den Nullvektor $\vec{0}$ enthält.

Aufgabe 2:

Für welche $\alpha \in I\!R$ sind folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Dies entscheiden wir über die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det A \underbrace{=}_{\substack{\text{1.Sp-2*3.Sp} \\ \text{2.Sp-2*3.Sp}}} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & \alpha - 4 & 2 \\ \alpha - 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Laplace, 1.Z}} = -(\alpha - 2)(\alpha - 4)$$

Also sind die Vektoren l.a. $\iff \det A = 0 \iff \alpha = 2$ oder $\alpha = 4$.

Alternativ wäre auch möglich, die Matrix auf Rang 3 zu untersuchen.

Aufgabe 3:

Was ist über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

auszusagen, wenn der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$\text{(i)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Diese drei Aufgaben lösen wir simultan mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{tauschen 1.//2.Z}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{3.Z-1.Z} \\ \text{4.Z - 1.Z}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{4.Z + 2.Z}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{4.Z-3.Z}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Zur Auswertung:

(i) Das homogene LGS ist natürlich lösbar. Der Rang der Matrix ist 3, also kann eine Variable, etwa x_4 frei gewählt werden. Sukzessives Auflösen von unten nach oben liefert:
$3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{3}\, t$
$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 - x_4 = -\dfrac{1}{3}\, t - t = -\dfrac{4}{3}\, t$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_4 = \dfrac{8}{3}\, t - \dfrac{1}{3}\, t - 3t = -\dfrac{2}{3}\, t$
Dies kann man noch zusammenfassen zum Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\, t \\ -\frac{4}{3}\, t \\ \frac{1}{3}\, t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in I\!R$$

(ii) Dieses LGS ist unlösbar, denn die 4.Zeile enthält den Widerspruch $0 = 1$

(iii) Dieses LGS ist lösbar, denn die 4. Zeile birgt jetzt nichts Widersprüchliches. Wieder kann man sukzessive von unten nach oben auflösen:

x_4 wählen wir frei: $x_4 = t$

$3x_3 - x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{3}\, x_4 + 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{3}\, t + 1$

$x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{3}\, t - 1 - t + 1 = -\dfrac{4}{3}\, t$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + \dfrac{8}{3}\, t - \dfrac{1}{3}\, t - 1 - 3t = -\dfrac{2}{3}\, t + 1$

Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\, t + 1 \\ -\frac{4}{3}\, t \\ \frac{1}{3}\, t + 1 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem einmal mit der Cramerschen Regel und einmal unter Benutzung der Matrix-Inversen:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Lösung:

- Die Matrix-Inverse berechnen wir mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{2.Z-1.Z} \\ \text{3.Z-1.Z}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{tauschen und *(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\text{3.Z -2 * 2.Z}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\text{(3,Z):3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{2.Z + 3.Z} \\ \text{1.Z - 2*3.Z}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\text{1.Z-2.Z}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ können wir nun lösen über $\vec{x} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

- Alternativ können wir auch mit der Cramerschen Regel arbeiten:

– $\det A = 3$

– $x_1 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -2$

– $x_2 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$

– $x_3 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}$

- Das Beispiel soll zeigen, dass diese Methoden zwar funktionieren, aber rechentechnisch aufwändig sind.

Aufgabe 5:

Ermitteln Sie Art und Lage der Extremstellen der Funktion

$$f(x, y, z) = 6z + 2xz - x^2 - y^2 - 4z^2.$$

Lösung:
$\nabla f = (2z - 2x, -2y, 2x - 8z + 6) = (0, 0, 0) \iff y = 0$ und $x = z = -1$

Die Hesse-Martrix in diesem Punkt ist gegeben durch $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Die Definitheit entscheiden wir über die Hauptminoren:

$H_1 = -2 < 0$, $H_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 > 0$, $H_3 = \det H = -24 < 0$. H ist also negativ definit, und damit ist der Punkt $(-1, 0, -1)^T$ eine Maximalstelle.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren für folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

Lösungen:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$:

  - $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \ldots =$
  $-\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)$
  - Eigenwerte: $0, 1, -2$, alle einfach $\Rightarrow$ alle Eigenräume sind eindimensional
  - Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$:
  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$
  Ein Eigenvektor ist z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$
  - Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$:
  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$
  Ein Eigenvektor ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - Eigenvektoren zu $\lambda_3 = -2$:
  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$
  Ein Eigenvektor ist z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$
  - A ist diagonalisierbar: Mit $S = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -11 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

  - $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$
  - Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ ist doppelter, $\lambda_2 = 10$ ist einfacher Eigenwert.
  - Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$:
    $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$. Der Rang dieser Matrix ist 1, also ist der Eigenraum zweidimensional. Zwei l.ua. Eigenvektoren sind z.B. gegeben durch $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
  - Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 10$:
    $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$
    Ein Eigenvektor ist z.B. gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Wir haben drei l.ua. Eigenvektoren. Also ist B diagonalisierbar. Genauer gilt mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

- $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

  - $p_C(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2$
  - Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$ ist einfacher, $\lambda_2 = 4$ doppelter Eigenwert.

- Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

  Ein Eigenvektor ist z.B. gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

  Die Matrix hat Rang 2. Der Eigenraum ist also nur eindimensional. Damit ist C <u>nicht</u> diagonalisierbar. Ein Eigenvektor ist z.B. gegeben durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die $m-$te Potenz der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L0̈sungshinweis:

Diagonalisiere die Matrizen: $S^{-1}AS = \Lambda \Rightarrow A^m = S\Lambda^m S^{-1}$.

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen (in Abhängigkeit der Parameter α bzw. β):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 3 \\ 3 & 1 & \beta \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

- Die ersten beiden Zeilen in A sind l.a. $\iff \det \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \iff 3\alpha - 4 = 0 \iff \alpha = \frac{4}{3}$. In diesem Falle sind dann aber die 2. Und 3. Zeile l.ua., denn $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = -\frac{19}{3} \neq 0.A$ hat also stets Rang 2

- $\det B = \underbrace{=}_{\text{(2.Z)-3*(1.Z),(3.Z)-(1.Z)}} \det \begin{pmatrix} 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1-3\beta & \beta-9 \\ 0 & -2-\beta & 0 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Laplace, 1.Sp}} (\beta+2)(\beta-9)$, also $\neq 0$ für $\beta \neq -2$ oder 9 . In diesem Fall ist also rg B $=3$.

Für $\beta=-2$ ist rg B $=$ rg $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Für $\beta=9$ ist rg B $=$ rg $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} = 2$

- In C sind die ersten drei Spalten l.ua., denn $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\underbrace{=}_{\text{Laplace, 1.Sp}} (-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, und damit ist rg $C=3$

Aufgabe 9:

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 48 & 46 & 0 & 42 \\ 27 & 28 & 27 & 1 & 11 \\ 27 & 25 & 23 & 1 & 11 \\ 0 & 17 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \pi & 42 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Laplace, 3.Sp}} (-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-2)\cdot(-2) = 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 48 & 46 & 0 & 42 \\ 27 & 28 & 27 & 1 & 11 \\ 27 & 25 & 23 & 1 & 11 \\ 0 & 17 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{(3.Z)-(4.Z)}} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 48 & 46 & 0 & 42 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 27 & 25 & 23 & 1 & 11 \\ 0 & 17 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\text{Laplace 4.Sp}} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 48 & 46 & 42 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 17 & 12 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Laplace, 1.Sp)}} (-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 17 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\text{Laplace, 3.Sp}} (-3)\cdot(+6)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 36$$

Aufgabe 10:

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Genau dann gilt für zwei quadratische Matrizen A und B die Binomische Formel $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, wenn $AB=BA$ gilt.

(ii) Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z} \in I\!R^n$ linear abhängig, so lässt sich einer der drei Vektoren als Linearkombination der anderen beiden schreiben.

(iii) Ist A eine invertierbare quadratische Matrix, so sind alle Eigenwerte von A ungleich 0, und ist λ ein solcher Eigenwert von A, so ist $\dfrac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(iv) Ist A eine diagonalisierbare quadratische Matrix, so konvergiert A^m für $m \to \infty$ gegen die Nullmatrix genau dann, wenn alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Lösung:

(i) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA$

(ii) Gelte $\alpha_1\vec{x} + \alpha_2\vec{y} + \alpha_3\vec{z} = \vec{0}$ mit Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nicht alle gleich 0 sind, etwa $\alpha_3 \neq 0$. Dann ist aber $\vec{z} = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}\,\vec{x} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}\,\vec{y}$, also $\vec{z}$ Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

(iii) Sei A invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow P_A(0) = \det(A - 0 \cdot E) \neq 0 \Rightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von A.
Der Rest folgt aus: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff \dfrac{1}{\lambda}\,\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$

(iv) Ist $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, so ist $A = S\Lambda S^{-1}$ und

$$A^m = S\Lambda^m S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \lambda_n^m \end{pmatrix} S^{-1} \to \mathcal{O},\ m \to \infty \iff$$

$|\lambda_i| < 1 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$

Aufgabe 11:

Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an:

$3x^4 - 6x^6 - \sin x$; $\dfrac{\sin x + x\cos x}{x \sin x}$; $\dfrac{1}{x}\ln x$; $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $e^{-x}\sin 2x$;

$x \cdot \arctan x$; $\dfrac{x+1}{x(x-1)}$; $\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^2(x-1)}$; $x^3 \cdot e^{-x}$ $\dfrac{x^3 + x^2 + 5x + 4}{x(x^2+4)}$

Lösungen:

- $\displaystyle\int \left(3x^4 - 6x^6 - \sin x\right) dx = \frac{3}{5}\,x^5 - \frac{6}{7}\,x^7 + \cos x$
- $\displaystyle\int \frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x}\, dx = \ln\left|x \sin x\right|$ (Integrand ist von der Bauart $\dfrac{f'}{f}$)

- $\int \frac{1}{x}\ \ln x\ dx \underbrace{=}_{\ln x=u;\ \frac{1}{x}\ dx=du} = \int u\ du = \frac{1}{2}\ u^2 = \frac{1}{2}\ln^2 x$

- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \underbrace{=}_{1-x^2=u;\ -2xdx=du} \int -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\ du = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}$

- $\int e^{-x}\sin 2x\ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} -e^{-x}\sin 2x + \int e^{-x}\cdot 2\cos 2x\ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}}$
  $-e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - \int 4e^{-x}\sin 2x\ dx$
  $\Rightarrow 5\int e^{-x}\sin 2x\ dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x$
  $\Rightarrow \int e^{-x}\sin 2x\ dx = \frac{1}{5}\left(-e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x\right)$

- $\int x\cdot\arctan x\ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} \frac{x^2}{2}\ \arctan x - \int \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{x^2+1}\ dx \underbrace{=}_{\text{ausdividieren}}$
  $\frac{x^2}{2}\ \arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\ dx = \frac{x^2}{2}\ \arctan x - \frac{1}{2}\ (x-\arctan x)$

- $\int \frac{x+1}{x(x-1)} \underbrace{=}_{\text{Zuh.meth.}} \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)\ dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1|$

- $\frac{3x^2-2x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ mit Konstanten A, B und C. B und C erhält man über die Zuhaltemethode zu $B=-1$, $C=2$, den rest am besten durch die Rechnung $\frac{3x^2-2x+1}{x^2(x-1)}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1} =$
  $\frac{3x^2-2x+1+x-1-2x^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2-x}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$
  $\Rightarrow \int\frac{3x^2-2x+1}{x^2(x-1)} = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)\ dx = \ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|$

- $\int x^3e^{-x}\ \ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} -x^3e^{-x} + \int 3x^2e^{-x}\ \ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} +$
  $\int 6xe^{-x}\ dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} + \int 6e^{-x}\ dx =$
  $-x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x}$

- $\frac{x^3+x^2+5x+4}{x(x^2+4)} \underbrace{=}_{\text{abdividieren}} 1+\frac{x^2+x+4}{x(x^2+4)} \underbrace{=}_{\text{PBZ}} 1+\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$
  A erhält man per Zuhaltemethode zu $A=1$. Für den Rest empfiehlt sich die Rechnung $\frac{x^2+x+4}{x(x^2+4)}-\frac{1}{x} = \frac{x^2+x+4-x^2-4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+4}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+x^2+5x+4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \Big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+4}\Big)\,dx =$$
$$x+\ln|x|+\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man den Graphen von $f(x)$ um die $x-$Achse rotieren lässt.

Lösung:

Das gesuchte Volumen ist $= \pi \displaystyle\int_0^{1/2} f^2(x)\,dx = \pi \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi\cdot\arcsin x\Big|_0^{1/2} =$

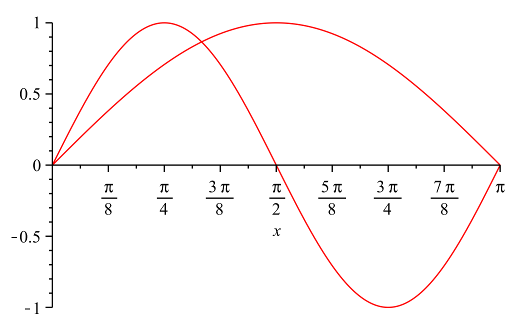
$\pi \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Aufgabe 13:

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $y = \sin x$ und $y = \sin 2x$ im Bereich $[0, \pi]$

(Hinweis: Es gilt die trigonometrische Identität $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.)

Lösung:



Die Kurven schneiden sich in den Punkten $(0,0), (\pi,0)$ und wegen der Identität $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ auch dort, wo $2\cos x = 1 \iff \cos x = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{\pi}{3}$ gilt. (s. auch obige Skizze).

Der linke Teil der Fläche ist dann $= \displaystyle\int_0^{\pi/3} \Big(\sin(2x) - \sin x\Big)\,dx =$

$\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/3} = \left((-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{4}$ und der rechte Teil ist $= \int\limits_{\pi/3}^{\pi} \left(\sin x-\sin(2x)\right)\, dx = \left(-\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

(beachte: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$)

Aufgabe 14:

Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert:

$$\int\limits_0^{\infty} x^2\, e^{-2x}\, dx; \quad \int\limits_1^{2} \frac{e^{-x}}{x-1}\, dx\ ; \quad \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx\ ; \quad \int\limits_0^{1} \ln x\, dx$$

Lösungen:

- $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\, dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int\limits_0^{\infty} x e^{-2x}\, dx \underbrace{=}_{\text{partiell}} \underbrace{-\frac{1}{2}\, x e^{-2x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}\, dx =$
  $-\frac{1}{4}\, e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$

- $\int\limits_1^{2} \frac{e^{-x}}{x-1}\, dx$ existiert nicht denn: $\frac{e^{-x}}{x-1} \geq \frac{e^{-2}}{x-1}$ und
  $\int\limits_1^{2} \frac{1}{x-1}\, dx = \ln(x-1)\Big|_1^{2} = \infty$

- $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty$

- $\int\limits_0^{1} \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_0^{1} = -1,$

  (beachte: $\lim\limits_{x\to 0+} x\ \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\text{l'Hosp.}} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} -x = 0$)

Aufgabe 15:

Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx\ ; \quad \int\limits_0^{1} \frac{e^x-1}{x}\, dx\ ; \quad \int\limits_0^{1} \frac{e^x-1}{x^2}\, dx\ ; \quad \int\limits_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}}\, dx\ ; \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Lösung:

- $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\, dx$ existiert, denn: $\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ und $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx < \infty$

- $\int\limits_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$ existiert, denn der Integrand ist bei $x = 0$ stetig fortsetzbar. Beachte dabei, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \underbrace{=}_{\text{l'Hosp.}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$ gilt.

- $\int\limits_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2}\, dx$ ex. nicht, denn $\frac{e^x-1}{x}$ ist beschränkt und
  $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty$

- $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\, dx$ ex., denn: $\frac{e^x}{\sqrt{x}} \leq \frac{e}{\sqrt{x}};\, ;\forall\ 0 \leq x \leq 1$ und
  $\int\limits_0^1 \frac{e}{\sqrt{x}}\, dx = 2e\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2e < \infty$

- $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ \ln^2 x\Big|_1^\infty = \infty.$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie folgende Flächenintegrale $\iint\limits_M f(x,y)\ d(x,y)$:

(i) $M = [0,2] \times [1,3]; \quad f(x,y) = xy^2$

(ii) $M = \{(x,y)^T \in I\!R^2 :\ 0 \leq x \leq 1;\ x \leq y \leq x^2 + 1\}; \quad f(x,y) = xy$

(iii) $M = \{(x,y)^T \in I\!R^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \}; \quad f(x,y) = \sin\Big(\pi(x^2+y^2)\Big)$

Lösungen:

(i) $\iint\limits_M f(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_0^2 \int\limits_1^3\ xy^2\ dy\ dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{y=1}^{y=3}\ dx = \int\limits_0^2 \frac{26}{3}\ x\ dx = \frac{13}{3}\ x^2\Big|_0^2 = \frac{52}{3}$

(ii) $\iint\limits_M f(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_0^1 \int\limits_x^{x^2+1} xy\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\ xy^2\Big|_x^{x^2+1} =$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\Big(x(x^2+1)^2 - x^3\Big)\ dx = \frac{1}{2}\int (x^5+x^3+x)\ dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{11}{24}$

(iii) In Polarkoordinaten ist $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x^2+y^2 = r^2$ und für $(x,y)^T \in M$ ist $1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ sowie $d(x,y) = rd(r,\varphi)$

$\Rightarrow \iint\limits_M f(x,y)\ d(x,y) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^2 \sin(\pi r^2) r\ dr\ d\varphi = 2\pi\cdot\Big(-\frac{1}{2\pi}\ \cos(\pi r^2)\Big)\Big|_{r=1}^{r=2} =$

$-\cos 4\pi + \cos\pi = -1 - 1 = -2$