Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Sommersemester 2014
13. Juni 2014
Blatt 8

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie 2

(www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss14/mgdoe2.html)

(Abgabe und Besprechung am Donnerstag, den 18.06.14 um 14:00 im H4/5)

32. Das Außenhandelsmodell von Goldberg sei durch folgende Gleichung gegeben:

$$Y_n = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot Y_{n-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit dem Anfangsvektor } Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Gleichgewichtszustand Y_g .

b) Ist der Gleichgewichtszustand Y_g attraktiv?

(6 Punkte)

33. Wir wollen die Rekursion $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ mit $a_1 = 1 = a_0$ lösen mit Hilfe von Matrixpotenzen. Es gilt nämlich:

$$Y_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y_n.$$

Also gilt (induktiv): $Y_n = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot Y_0$.

Löse die Rekursion! (6 Punkte)

34. a) Zeige, für die (allgemeinen) (2,2)-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
Man kann übrigens zeigen, dass $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ auch allgemein für (n,n)-Matrizen gilt.

b) Sei A diagonalisierbar, d.h. $\exists\, S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^{-1}AS = \Lambda$. Zeige: $p_A(\lambda) = p_\Lambda(\lambda)$.

c) Sei Λ eine (n,n)-Diagonalmatrix. Zeige, dass die Determinante von Λ gleich dem Produkt der Eigenwerte von Λ ist.

d) Zeige: Ist A diagonalisierbar, d.h. $\exists\, S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^{-1}AS = \Lambda$, so ist die Determinante von A gleich dem Produkt der Eigenwerte von A.

(2+2+2+2 = 8 Punkte)

35. Für Fans der Sarrus-Regel (Ironie!!!) : Berechne ohne die Sarrus-Formel:

$$\det \begin{pmatrix} 2014 & 2013 & 2012 \\ 2013 & 2012 & 2011 \\ 2012 & 2011 & 2010 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei Verwendung der Sarrus-Regel gibt es maximal noch 2 Punkte. (5 Punkte)