Blatt 13

Abgabe: Fr., 11.02.2011 vor der Übung.

Aufgabe 13.1: Uneigentliche Integrale (14)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $a \neq b$ und $\omega > 0$ fest, aber beliebig. Berechnen Sie folgende uneigentlichen Integrale:

(a) $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx,$$ (b) $$\int_0^\infty \frac{x^{2k}}{1+x^{2n}}\,dx,$$

(c) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2\pi x)}{x^4+x^2+1}\,dx,$$ (d) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx,$$

(e) $$\int_0^\infty \frac{x\sin(\omega x)}{(x^2+a^2)}\,dx,$$ (f) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Aufgabe 13.2: Reelle Integrale (4)

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\,dx \quad \text{mit } a \in \mathbb{C},\ |a| < 1,$$

(b) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos x)^2}\,dx \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C},\ |a| > |b| > 0,$$

Aufgabe 13.3: Nullstellen (4)

(a) Wie viele Nullstellen des Polynomes $P(z) := z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ liegen im Inneren des Einheitskreises?

(b) Zeigen Sie, dass für $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| > e$ die Gleichung $cze^z = 1$ genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ im Einheitskreis besitzt.

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass in (b) für reelle $c > e$ für die Lösung $0 < z < 1$ gilt.